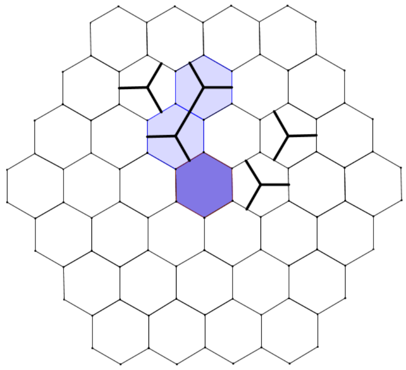
Второй международный математический турнир
разновозрастных команд «Дважды Два»

15 ноября 2013 г.

Командная олимпиада

1. На рисунке изображен дачный кооператив, состоящий из 37 шестиугольных участков. На центральном участке находится источник воды. На каждом из остальных участков прокладываются трубы одним из двух способов, отличающихся поворотом на 60 градусов. Можно ли проложить трубы так, чтобы вода дошла до всех участков? Считается, что вода дошла до участка, если она дошла до его центра. (На рисунке для примера проложены трубы на некоторых участках. Серым закрашены участки, до которых дошла вода).



2. В ряд встали 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Какие-то пять из них сказали: «Среди стоящих справа от меня — ровно 3 рыцаря». Остальные пять сказали: «У меня есть сосед слева и он рыцарь». Сколько могло быть рыцарей? (Требуется найти все варианты и доказать, что других нет.)

3. Четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle BCD = \angle ABC = 120^\circ$, $BC + CD = AD$. Докажите, что $AB = CD$.

4. У барона Мюнхгаузена имеется набор из 7 гирь (среди гирь могут быть и одинаковые). Барон утверждает, что для любого числа k от 2 до 5 он может выбрать из этого набора k гирь таких, что их масса будет равна ровно половине массы всех гирь. Могут ли слова барона быть правдой?

5. При каком наименьшем n сумма n слагаемых $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{n}$ делится на 45?

6. В городе живёт миллион мальчиков и миллион девочек, некоторые из них дружат между собой. Одним заклинанием снежная королева может поссорить каких-нибудь мальчика и девочку или, наоборот, подружить. За какое наименьшее количество заклинаний она гарантированно сможет добиться того, чтобы каждый мальчик дружил с нечётным количеством девочек, а каждая девочка дружила с нечётным количеством мальчиков?

7. Известно, что $\frac{x-y}{1+y} + \frac{y-z}{1+z} + \frac{z-x}{1+x} = 1$. Найдите $\frac{1+x}{1+y} + \frac{1+y}{1+z} + \frac{1+z}{1+x}$.

8. На доске написано 50 чисел: по одному от 1 до 50. Одним ходом разрешается выбрать какое-нибудь число (назовём его A), посчитать, сколько раз оно написано на доске (получилось число N), после этого вместо каждого числа A написать число N. Могли ли через несколько ходов все 50 чисел на доске оказаться четвёрками?

9. В треугольнике ABC на продолжении стороны CB за точку B отложили точку D такую, что $AB = BD$. Пусть M — середина стороны AC. Биссектриса угла ABC пересекается с прямой DM в точке P. Докажите, что угол BAP равен углу ACB.

10. Оргкомитет турнира первоначально состоял из 8 человек. Каждый член оргкомитета считает, что некоторые из его коллег компетентны, а остальные — нет, и не меняет своего мнения. Каждое утро проводится голосование: каждый из членов оргкомитета пишет список некомпетентных, по его мнению, коллег, и те члены оргкомитета, которые признаны некомпетентными не менее чем половиной всех членов, исключаются из оргкомитета на оставшуюся часть турнира. Докажите, что на пятый день из оргкомитета никого не исключат.