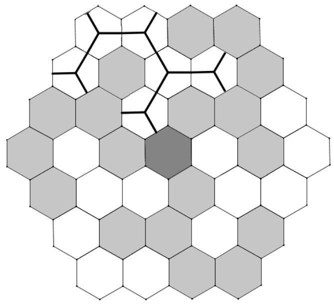
Второй международный математический турнир
разновозрастных команд «Дважды Два»

15 ноября 2013 г.

Решения задач командной олимпиады

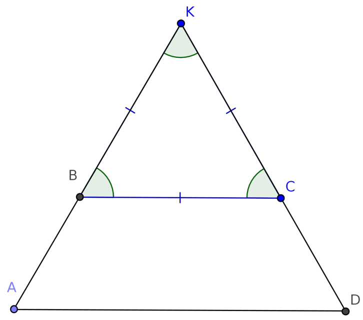


1. На рисунке изображен дачный кооператив, состоящий из 37 шестиугольных участков. На центральном участке находится источник воды. На каждом из остальных участков прокладываются трубы одним из двух способов, отличающихся поворотом на 60 градусов. Можно ли проложить трубы так, чтобы вода дошла до всех участков? Считается, что вода дошла до участка, если она дошла до его центра. *(Е.Бакаев)*

Ответ: это можно сделать. Ответ на рисунке. Изображена одна из шести ветвей, остальные получаются из нее поворотами на 60°.

2. В ряд встали 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Какие-то пять из них сказали: «Среди стоящих справа от меня — ровно 3 рыцаря». Остальные пять сказали: «У меня есть сосед слева и он рыцарь». Сколько могло быть рыцарей? (Требуется найти все варианты и доказать, что других нет.) *(Е.Бакаев)*

Ответ: рыцарей было 0 или 4. **Решение:** если рыцари есть, то рассмотрим самого левого, он не мог сказать, что слева от него рыцарь, значит справа от него ровно 3 рыцаря, значит рыцарей ровно четыре. Примеры для 0 и 4 рыцарей приводятся.



3. Четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle BCD = \angle ABC = 120^\circ$, $BC + CD = AD$. Докажите, что $AB = CD$. *(О.Ланин)*

Решение: Пусть K — точка пересечения прямых AB и CD. Тогда треугольник BCK — правильный, так как два его угла равны 60°. Отсюда получаем, что $AD = BC + CD = KD$. Значит, треугольник AKD равнобедренный, и, т.к. один из его углов равен 60°, то он правильный, откуда следует, что $AK = KD$ и $AB = CD$.

4. У барона Мюнхгаузена имеется набор из 7 гирь (среди гирь могут быть и одинаковые). Барон утверждает, что для любого числа k от 2 до 5 он может выбрать из этого набора k гирь таких, что их масса будет равна ровно половине массы всех гирь. Могут ли слова барона быть правдой? *(Н.Чернятьев, Костромской ТЮМ)*

Решение: Да, могут, например, если веса гирек 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4 грамм.

5. При каком наименьшем n сумма n слагаемых $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}_{n}$ делится на 45? *(Фольклор)*

Ответ: 35. **Решение:** Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и на 9. При делении на 9 число, состоящее из k единиц, дает такой же остаток, как k, поэтому $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}_{n}$ дает такой же остаток, как $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, откуда следует, что n дает остаток 0 или 8 при делении на 9. А при делении на 5 $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}_{n}$ дает такой же остаток, как n, значит n делится на 5. Перебором ищем первое подходящее под эти условия n.

6. В городе живёт миллион мальчиков и миллион девочек, некоторые из них дружат между собой. Одним заклинанием снежная королева может поссорить каких-нибудь мальчика и девочку или, наоборот, подружить. За какое наименьшее количество заклинаний она гарантированно сможет добиться того, чтобы каждый мальчик дружил с нечётным количеством девочек, а каждая девочка дружила с нечётным количеством мальчиков? *(Е.Бакаев)*

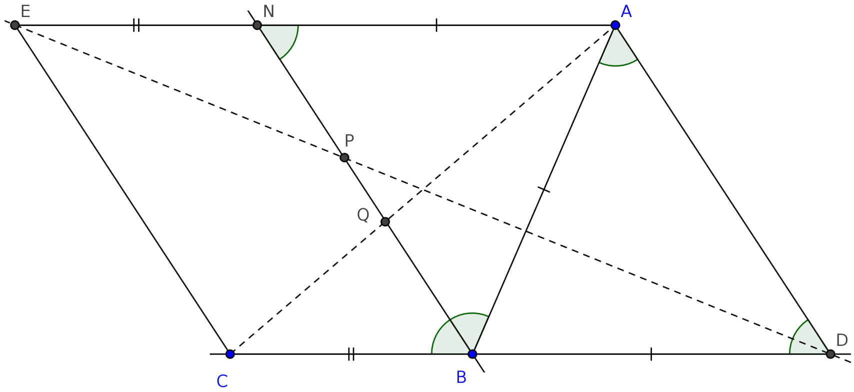
Ответ: миллион. **Решение:** В случае, если у каждого мальчика четное количество друзей-девочек, нам потребуется не меньше миллиона заклинаний. Теперь почему миллионом заклинаний всегда можно обойтись. Пусть плохих (т.е. с неправильной четностью дружб) мальчиков m, плохих девочек d и $m - d = r \geq 0$. Возьмем d пар «плохая девочка–плохой мальчик», наложим на них заклинания. Теперь все девочки хорошие и осталось r плохих мальчиков, причем r четно, т.к. в любом графе сумма степеней вершина четна. Возьмем любых $r/2$ девочек и составим r пар «хорошая девочка–плохой мальчик», где каждая девочка входит ровно в 2 пары, наложим на них заклинания. Теперь все дети стали хорошими, причем мы этого добились за $d + r = m \leq 1000000$ заклинаний.

7. Известно, что $\frac{x-y}{1+y} + \frac{y-z}{1+z} + \frac{z-x}{1+x} = 1$. Найдите $\frac{1+x}{1+y} + \frac{1+y}{1+z} + \frac{1+z}{1+x}$. *(Фольклор)*
Ответ: 4. Решение: $\frac{x-y}{1+y} + 1 = \frac{1+x}{1+y}$, с другими дробями аналогично.

8. На доске написано 50 чисел: по одному от 1 до 50. Одним ходом разрешается выбрать какое-нибудь число (назовём его A), посчитать, сколько раз оно написано на доске (получилось число N), после этого вместо каждого числа A написать число N. Могли ли через несколько ходов все 50 чисел на доске оказаться четвёрками? *(Е.Бакаев)*

Ответ: не могли. **Решение:** Предположим, такое произошло. Посмотрим, как могло изменяться количество четверок. Одним ходом оно либо обнуляется, либо увеличивается на 4. Если оно когда-то обнулилось, то с этих пор оно всегда будет делиться на 4, но 50 не делится на 4. Если оно никогда не обнулялось, то значит, оно только увеличивалось на 4, но начальное значение 1 и конечное значение 50 дают разные остатки при делении на 4. Противоречие. Значит, такого не могло произойти.

9. В треугольнике ABC на продолжении стороны CB за точку B отложили точку D такую, что $AB = BD$. Пусть M — середина стороны AC. Биссектриса угла ABC пересекается с прямой DM в точке P. Докажите, что угол BAP равен углу ACB. *(Фольклор)*



Решение: Построим параллелограмм $ADCE$, тогда прямая DM совпадает с прямой DE. Пусть N — точка пересечения биссектрисы угла ABC и прямой AE. Несложно понять, что $\angle ABN = \angle NBC = \angle BAC = \angle ADB = \alpha$, откуда следует, что $BN \parallel AD$, значит также $\angle ANB = \alpha$ и $DB = BA = AN$ и, как следствие, $EN = BC$. Обозначим точку пересечения прямых AC и NB как Q. Тогда из подобия треугольников: $\frac{QB}{AD} = \frac{CB}{CD} = \frac{EN}{EA} = \frac{NP}{AD}$, значит $QB = NP$. Треугольник ABN равнобедренный и равные отрезки QB и NP отложены с разных сторон его основания, значит $\angle NAQ = \angle BAP$. Т.к. $ADCE$ — параллелограмм, то $\angle ACB = \angle CAE$. Из двух полученных равенств получаем требуемое: $\angle ACB = \angle CAE = \angle NAQ = \angle BAP$.

10. Оргкомитет турнира первоначально состоял из 8 человек. Каждый член оргкомитета считает, что некоторые из его коллег компетентны, а остальные — нет, и не меняет своего мнения. Каждое утро проводится голосование: каждый из членов оргкомитета пишет список некомпетентных, по его мнению, коллег, и те члены оргкомитета, которые признаны некомпетентными не менее чем половиной всех членов, исключаются из оргкомитета на оставшуюся часть турнира. Докажите, что на пятый день из оргкомитета никого не исключат. *(Р.Семизаров)*

Решение: Если при каком-то голосовании никого не исключили, то больше исключений уже не будет. Предположим, что исключения происходили в течение всех пяти дней. Если человека не исключили при первом голосовании, то среди восьми членов исходного оргкомитета некомпетентным его считают не более трех человек. Поэтому для того. чтобы кого-то исключили во второй день необходимо, чтобы в первый день исключили как минимум двоих. Если в первый день исключили ровно двоих, то те же рассуждения показывают, что для того, чтобы кого-то исключили в третий день необходимо, чтобы к этому моменту число членов оргкомитета не превышало четырех. Если же в первый день исключили более двух, то все равно на третий день останется не более 4 членов оргкомитета, так как кого-то еще исключили во второй день. Если в третий день член оргкомитета исключен не был, то в составе оргкомитета третьего дня был не более, чем один человек, голосовавший против него. Если при четвертом голосовании этого члена оргкомитета исключили, значит на четвертый день оргкомитет составлял не более двух человек. Тогда либо при четвертом голосовании исключенных не будет, либо на пятый день останется не больше одного члена оргкомитета и исключения прекратятся.