Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

LXIII Национална олимпиада по математика

Национален кръг

Първи ден, 17 май 2014 г.

Задача 1. Дадени са фиксирана окръжност k и фиксирана точка A извън нея. Отсечката BC е диаметър на k. Да се намери геометричното място на ортоцентъра на $\triangle ABC$, когато BC се мени.

Задача 2. Дадена е шахматна дъска с размери $m \times n$, където $m \geq 2$ и $n \geq 2$ са естествени числа. Едно оцветяване на клетките на дъската в бяло, зелено, червено и синьо (при което всяка клетка е оцветена в точно един цвят) наричаме *шарено*, ако всяко квадратче 2×2, съставено от четири клетки, съдържа всеки цвят точно по веднъж. Какъв е броят на шарените оцветявания?

Задача 3. Във всяка точка от пространството е записано по едно реално число, различно от нула. Известно е, че за всеки тетраедър τ, числото в центъра на вписаната сфера на τ съвпада с произведението на числата във върховете на τ. Да се докаже, че всички записани числа са равни на 1.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Успех!