



**Первый международный математический турнир
разновозрастных команд «Дважды Два»**

3 ноября 2012 г

Олимпиада по алгебре и теории чисел (профи)

1. На каждом этаже многоэтажного дома – по две квартиры. Лена, живущая в 38-й квартире, перестукивается через стенку со Светой из 51-й. На каком этаже они живут? (К.Кноп)
2. Найдите все простые числа p , которые можно представить в виде $p=a^4+b^4+c^4-3$, где a , b и c – простые числа (не обязательно различные). (А.Голованов)
3. Найдите все функции f , определённые на всей числовой прямой, для которых $f(f(x)+y)=f(f(y))+x$ для всех вещественных чисел x и y . (А.Петухов)
4. Множество натуральных чисел A таково, что для любых двух его элементов a, b число $\frac{[a, b]}{a - b}$ также принадлежит множеству A . Докажите, что в множестве A не более двух чисел. (Как обычно, $[a, b]$ обозначает наименьшее общее кратное чисел a, b .) (А.Голованов)
5. Последовательность чисел $x_1, \dots, x_n$ такова, что $x_1 = 4$ и $x_{n+1} = x_1 \dots x_n + 5$ (в частности, $x_2 = 4 + 5 = 9$, $x_3 = 4 \times 9 + 5 = 41 \dots$). Докажите, что полными квадратами в этой последовательности являются только первые два её члена. (А.Голованов)
6. Вася Фаберже нашёл в отцовском сундуке 16 обрывков старинной золотой цепочки - у восьми из них осталось всего по 4 звена, а у остальных – по 5 звеньев. Он хочет соединить все имеющиеся звенья в новую цепочку, при этом некоторые звенья ему придётся распилить, а потом снова спаять. Каким наименьшим количеством распиленных звеньев ему удастся обойтись? (К.Кноп)
7. Можно ли при некотором натуральном N разбить все натуральные числа от 1 до N на две группы и выписать все числа в каждой группе подряд без пробелов в некотором порядке так, чтобы получились две одинаковые записи? (А.Голованов)
8. Для положительных чисел p, q, r докажите неравенство $\frac{2}{3} pqr(p+q+r) \leq (p+q)^2(q+r)^2$. (А.Петухов)

Время на решение – 4 часа (240 минут)