Краткие решения задач олимпиады 5 класса
29 января 2017

Часть А

К каждой задаче необходимо указать ответ.
Решения приводить не требуется.

1. На какую цифру оканчивается произведение всех чисел, делящихся на 2017 и меньших 20170? (*фольклор*)

Ответ. 0.

Решение. Поскольку среди этих чисел есть число 2017·2 и 2017·5, то в искомом произведении будет множитель 10.

2. У Егора и Артёма вместе 45 марок. Половина марок Егора равна трети марок Артёма. Сколько марок у каждого мальчика? (*Т.Антошкина*)

Ответ. У Егора 18 марок, у Артёма – 27 марок.

3. Три одинаковых квадрата приложили друг к другу стороной (без наложений) так, что получился прямоугольник. Чему равна площадь прямоугольника, если его периметр равен 48см? (*фольклор*)

Ответ. 108 см^2.

Решение. Одна сторона прямоугольника равна стороне квадрата, а другая – в 3 раза больше, т.е. периметр прямоугольника состоит из 8 сторон квадрата. Отсюда легко найти длины сторон и площадь

4. В компании детей среди любых четырех есть Саша. А среди любых трех есть девочка. Какое наибольшее количество Александров (мальчиков) может быть в этой компании? (*Н.Михайловский*)

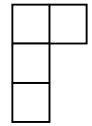
Ответ. Два.

Решение. Так как среди любых трех есть девочка, то мальчиков не больше двух. И такое быть может: например компания ровно из 4 человек – два мальчика Саши и две девочки Маши.

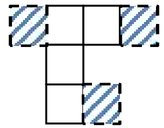
5. Петя сложил три последовательных числа и получил число с разными цифрами. Переписывая результат в тетрадь, он забыл дописать последнюю цифру и записал 1046. Какие три числа сложил Петя? (*Е.Иванова*)

Ответ. 3488, 3489 и 3490.

Решение. Сумма любых трех последовательных чисел должна делиться на 3, поскольку она равна утроенному среднему числу. Чтобы число 1046* делилось на 3 вместо * может быть 1, 4 или 7. Разделив 10467 на 3, получим среднее число.



6. К четырехклеточной фигуре, имеющей форму буквы Г, требуется добавить ещё одну клетку так, чтобы получилась фигура, имеющая ось симметрии. Сколькими способами это можно сделать? (*Г.Жуков*)



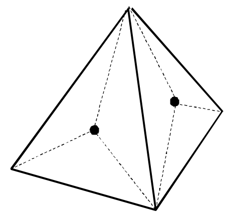
Ответ. Тремя.

Решение. Возможные способы указаны на рисунке.

7. Электронные часы показывают время в 24 часовом формате. Какое максимальное число минут подряд на экране будут высвечиваться четыре цифры, идущие в порядке а) возрастания; б) неубывания? (Вместо 24:00 часы показывают 00:00) (*А.Мищенко*)

Ответ. а) 7 минут; б) 15 минут.

Решение. а) Предпоследняя цифра не может быть меньше 2, иначе первые две не смогут идти в порядке возрастания. Двузначное число с возрастающими цифрами может быть только до перехода через разряд. Значит, это не может продолжаться больше 7 минут (от 3 до 9). А это возможно: от 01:23 до 01:29); б) Без перехода через разряд такое свойство может наблюдаться не более 10 минут. Но теперь после перехода через разряд неубывание вполне может сохраниться, если при этом предпоследняя цифра тоже стала нулем. Но тогда и все должны стать нулями. Поэтому самую длинную цепочку нужно искать около полуночи. От 23:55 до 00:09.



8. В бумажной пирамидке на каждой грани выбрали точку, соединили ее синим отрезком с вершинами граней и разрезали по всем синим отрезкам. Сколько получилось бумажных кусочков? (*Е.Иванова*)

Ответ. 6 кусочков.

Решение. Кусочков будет ровно столько, сколько ребер у пирамидки.

9. Оля, Вася, Маша и Петя – ученики 4, 5, 6 и 7 классов. На вопрос, кто кого старше, ребята сказали:

Оля: «Маша старше Пети»
Вася: «Оля младше Пети»
Маша: «Петя старше Васи»
Петя: «Маша младше Оли».

Позже выяснилось, что если кто-то высказался про школьника старше его самого, то он соврал. Все остальные утверждения были верными. Определите, кто в каком классе учится. (*Е.Иванова , А.Петухов*)

Ответ. Оля – в 5 классе, Вася – в 7, Маша – в 4, Петя – в 6.

Решение1. Рассмотрим утверждение Оли. Пусть она сказала правду. Тогда Маша старше Пети и Оля старше и Пети, и Маши (иначе ее утверждение было бы ложным). Тогда утверждение Пети должно быть ложным, так как он говорит про Машу, которая старше. Значит, Маша старше Оли. Но мы уже выяснили, что Оля старше Маши. Значит такого не может быть и Оля лжет.

Это значит, что Маша младше Пети и Оля либо младше и Маши, и Пети, либо старше Маши, но младше Пети. В любом случае Петя старше и Маши, и Оли. Значит, он говорит правду, а Маша лжет. Отсюда М < О < П < В. Проверяем этот вариант. Он подходит.

Решение2. Найдем, кто старше всех. Про него все сказали неправду. Это не может быть Петя, потому что тогда Маша сказала правду. Это не может быть Маша, так как тогда про нее Оля сказала правду. И это не может быть Оля. Так как тогда про нее Петя сказал правду. Поэтому Вася – самый старший. И он точно сказал правду. Значит, Оля младше Пети и Оля соврала про Петю. Т.е. Петя старше Маши и Петя – второй по возрасту. Осталось выяснить, кто старше Оля или Маша. Но это ясно из утверждения Пети.

10. Лёша записал на доске натуральное число, меньшее 1000. Каждую секунду он делит текущее число на доске на 2, если оно четное и записывает результат деления вместо предыдущего числа. Если же число на доске нечетно, он прибавляет к нему 1 и тоже записывает результат сложения вместо прежнего числа. Через какое наибольшее число ходов у Леши может впервые получиться число 1 на доске?

Например, если было записано 5, то мы получаем 1 через 5 ходов:

$$5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1\,.$$ (*Н.Михайловский*)

Ответ. Через 19 ходов.

Идеи решения.Решим задачу с конца: 1 - 2 - 4 - 3 - 6 - 5 - 10 - 9 - 18 - 17 - 34 - 33 - 66 - 65 - 130 - 129 - 258 - 257 - 514 - 513. Очевидно, что это самая длинная возможная цепочка ходов. Значит, не позже чем через 19 ходов он получит 1.

Часть Б

В этой части кроме ответа требуется привести решение.

1. У Остапа 4 брата. Однажды мама принесла 50 конфет и высыпала их на тарелку. Остап взял себе сколько-то конфет. А потом конфеты брали остальные братья. Каждый следующий брал как минимум в 2 раза больше, чем предыдущий. Какое наибольше число конфет мог взять Остап? (*А.Петухов*)

Ответ. 1.

Решение. Если бы Остап взял хотя бы 2 конфеты, то следующий брат должен был взять не менее 4 конфет, следующий – не менее, чем 8, следующие – 16 и 32. Сумма всех конфет тогда будет больше 50. Если же Остап взял 1 конфету, то сумма 1+2+4+8+16 меньше 50 и так могло быть.

2. Гриша написал на доске число 16 и каждую минуту прибавляет к числу на доске его наибольший простой делитель (стирает старое число и записывает новое). Начав с числа 16, он получит последовательность: 16 — 18 — 21 — 28 — 35 — … Может ли на доске в какой-нибудь момент времени оказаться число вида 1000…000? (*Н.Михайловский.*)

Ответ. Не может.

Решение. Заметим, что при описанном алгоритме наибольший простой делитель текущего числа на доске может только увеличиваться, как видно, уже после 2 шага число на доске делится на 7, то есть в числе всегда будет простой делитель не меньший 7. Но в числе 1000….000 есть только простые делители 2 и 5, которые меньше 7. Противоречие.

3. На берегу озера стоят три домика: Совы, Кролика и Винни-Пуха. По берегу озера идет круговая дорога. Пятачок посадил дуб ровно посередине между домиками Совы и Кролика. А ровно посередине между домиками Винни-Пуха и Кролика в улье живут пчелы. Сейчас Пятачок стоит ровно посередине между домиками Совы и Винни-Пуха. Если он пойдет к дубу, зайдя по дороге в гости к Сове, то пройдет 17 км, а если пойдет к дубу, зайдя в гости к Винни-Пуху и Кролику, то пройдет 35 километров. Каково расстояние по дороге от домика Винни-Пуха до улья? (*Н.Михайловский*)

Ответ. 9км.

Решение. Разница в длине между двумя разными маршрутами Пятачка до дуба равна расстоянию от домика Кролика до домика Винни-Пуха. Следовательно, расстоянию от домика Кролика до домика Винни-Пуха равно 18 км (35 км-17 км). Расстояние от Винни-Пуха до Улья равно половине предыдущего расстояния, т. е. 9 км..

4. 31 января 2016 года к доктору Пилюлькину пришла толпа коротышек с жалобами на плохое самочувствие. Пилюлькин назначил всем весь февраль пить витамины – по 1 таблетке 1 раз в день. Незнайка, как всегда опоздал и пришел к доктору только в феврале. Пилюлькин назначил со следующего дня витамины и ему тоже. Оказалось, что за февраль коротышки (включая Незнайку) съели 2017 таблеток. В какой день февраля пришел к доктору Незнайка? (*Е.Иванова*)

Ответ. 13 февраля

Решение. Поскольку в феврале 2016 года 29 дней, то если вычесть таблетки, которые съел Незнайка, то остальное должно делиться на 29. Разделим 2017 на 29 с остатком. 2017 = 69x29+16. Значит, Незнайка пил таблетки 16 дней. Это с 14 по 29 февраля. Следовательно, он пришел к Пилюлькину 13 февраля.

5. В круг встали 2017 жителей Острова Рыцарей и Лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждого из них попросили назвать своего правого соседа, и каждый ответил либо «рыцарь», либо «лжец». Могло ли оказаться, что ответов «рыцарь» было дано ровно 2000? (*Е.Иванова*)

Ответ. Не могло.

Решение. Рассмотрим пару рядом стоящих и будем считать только то, что сказал левый сосед. Тогда в этой паре левый человек мог сказать «рыцарь» в случае только, если пара РР или ЛЛ. Аналогично левый мог сказать «лжец» только в случаях ЛР и РЛ. Таким образом количество ответов «лжец» равно количеству смешанных пар.

Множество всех жителей в хороводе разбивается на области одного типа Р…Р и Л…Л. И смешанные пары могут быть только на границе этих областей. Следовательно, количество смешанных пар в точности равно количеству областей. Но количество областей не может быть нечетным, поскольку области рыцарей и лжецов чередуются. Поэтому сказать «лжец» могли только четное число человек.

Если всего опросили 2017 человек, а «рыцарь» сказали 2000, значит, «лжец» сказали 17. Но это нечетное число, а, как было доказано выше, такого быть не может.

Критерии:

Каждый правильный ответ в части А стоит 2 балла (если пунктов несколько, то каждый пункт стоит 2 балла).

В части Б оценивается решение – от 0 до 5 баллов.

Олимпиада 5 класса

Письменный тур.

Результаты письменного тура будут опубликованы ***после 15 февраля*** на нашем сайте. http://mathbaby.ru

Устный тур.

Устный тур пройдёт 19 марта в помещении МИРЭА. На него будут приглашены участники, показавшие высокий результат на письменном туре.