ТУРНИР
МЁБИУСА

Задачи
II математического
турнира мини-боёв

Второй математический Турнир Мёбиуса прошёл с 28 октября по 1 ноября 2018 года в Московской области на базе отдыха «Зелёный Остров» при поддержке Творческой Лаборатории «Дважды Два» и журнала для любознательных «Квантик». В турнире приняли участие 18 команд школьников 5 и 6 классов из Москвы (школы № 2086, № 1329, № 444), Санкт-Петербурга (кружки «Фрактал» и «Раз-Два-Три!»), Иванова, Сыктывкара (школы № 1 и № 3 и Мытищ (Московская область).

В работе оргкомитета принимали активное участие Сундукова Светлана Сергеевна, Мигаева Анастасия Сергеевна и Кудрявцева Анастасия Юрьевна, помогали в организации турнира Шарич Елена Николаевна и Бондаренко Евгений Юрьевич. Спортивные мероприятия провели Агабеков Георгий Артёмович и Парфенов Денис Сергеевич.

Оргкомитет выражает благодарность Авилову Николаю Ивановичу за участие в составлении задач, Иванову Константину Сергеевичу, Акбари Альмару и Пронину Кириллу Дмитриевичу за работу в методической комиссии, Асташкиной Валентине Геннадьевне и редакции журнала «Квантик» за информационную поддержку, а также коллективу базы отдыха «Зелёный Остров» и лично Липатову Сергею Викторовичу за замечательные условия работы.

Председатель жюри, преподаватель кружков «СВМ — Союз Весёлых математиков»
Мигаев Сергей Владимирович

Председатель оргкомитета, преподаватель Творческой Лаборатории «Дважды Два»
Бондаренко Константин Николаевич

Содержание

1 Высшая лига 5-х класса

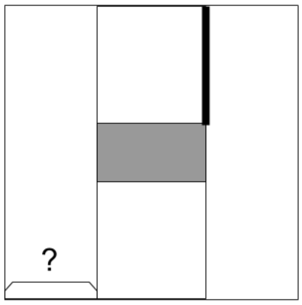
Командная олимпиада

28 октября 2018 г.

Задача 1. Клара посчитала сумму цифр, с помощью которых записывается сегодняшняя дата: 28.10.2018. Сколько в этом году дат с такой же суммой цифр (не учитывая сегодня)? *(по мотивам фольклора)*

Задача 2. На рынке продавались арбузы, общим весом 100 кг. Суммарный вес трёх самых лёгких арбузов — 25 кг, а трёх самых тяжёлых — 35 кг. Каждый арбуз может весить нецелое число килограмм. Сколько арбузов могло продаваться на рынке? *(из турниров «Лига Открытий»)*

Задача 3. Лена и Оля научились рисовать параллельные отрезки внутри квадрата. Сначала Лена провела два отрезка на равном расстоянии от сторон исходного квадрата, а потом Оля провела два отрезка на равном расстоянии от сторон образовавшегося в центре прямоугольника. В результате образовался серый прямоугольник с соотношением сторон 2 : 1. Известно, что меньшая сторона серого прямоугольника равна 24 см и она в 3 раза меньше выделенного отрезка. Найдите длину неизвестного отрезка. *(К. Н. Бондаренко)*



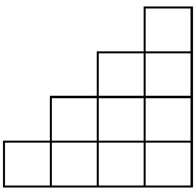
Задача 4. Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф собирали грибы — мухоморы и поганки. Ниф-Ниф со-брал 26 мухоморов, а Нуф-Нуф — 17 поганок. Известно, что всего мухоморов было собрано столько, сколько нашли грибов вместе Наф-Наф и Нуф-Нуф. Сколько поганок собрал Наф-Наф?

Задача 5. У учительницы есть 50 карточек с числами от 1 до 50. Она раздает по две карточки 25 ученикам. При этом ученик становится счастливым, если числа на его карточках отличаются более чем в два раза. Может ли учительница сделать всех учеников счастливыми? *(из турниров «Лига Открытий»)*

Задача 6. В одной комнате собралось больше 20 человек, каждый рыцарь или лжец. Все люди произнесли фразу: «Среди всех остальных, не считая меня, не больше пяти рыцарей и не меньше десяти лжецов». Сколько рыцарей могло находиться в комнате? (Рыцари всегда говорят только правду, лжецы всегда врут.)

Задача 7. Кирилл написал на доске всевозможные 9-значные числа, в записи которых встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу. Мефодий выбрал из них самое большое и самое маленькое и стёр их. Потом он выбрал самое большое и самое маленькое из оставшихся чисел и тоже их стёр. Мефодий повторял свои действия до тех пор, пока на доске не осталось два числа. Какие это числа? *(из материалов Кировской ЛМШ–2010, 7 класс)*

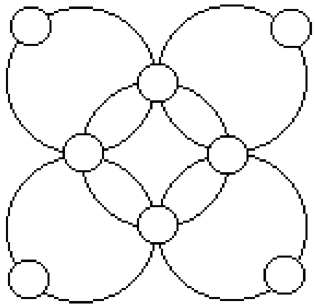
Задача 8. В клетках «лестницы» расставлены числа 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, так что сумма чисел в каждом столбце, кроме самого левого, на 1 больше, чем в предыдущем. Сколько существует различных расстановок? *(К. Н. Бондаренко, ТЮМка 2017/2018, первая лига)*



Первый тур

29 октября 2018 г.

Задача 9. Расставьте натуральные числа от 1 до 8 в кружки фигуры так, чтобы сумма чисел расположенных на каждой из пяти окружностей была одной и той же, и докажите, что такая расстановка единственная. *(предложил Н. И. Авилов)*



Задача 10. Четыре гномика поселились в клетках квадрата 2×2. Утром гномики, живущие в соседних по сторонам клетках, пожали друг другу руки. На следующий день они поселились в домики по-другому и опять пожали руки соседям. На третий день всё повторилось. Могло ли оказаться так, что на каждый пожал каждому руку ровно 2 раза? *(из материалов Адыгейской ЛМШ)*

Задача 11. Решите ребус ТУРНИР + ОСТРОВ = МИНИБОИ. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 12. Говорят, что если подойти к Мёбе 2 ноября, то он будет раздавать ленты. Первому подошедшему он даст одну ленту и десятую часть всех оставшихся, второму подошедшему даст две ленты и десятую часть оставшихся, ..., девятому подошедшему даст девять лент и десятую часть оставшихся. Если же кто-то подойдет потом, то ему ничего не достанется. Сколько лент есть у Мёбы? *(Фольклор)*

Задача 13. В столовой лежат кусочки сыра и хлеба. Если добавить ещё 20 кусков сыра, то их станет вдвое больше, чем хлеба. Сколько кусков хлеба необходимо убрать, чтобы их стало вдвое меньше, чем сыра? *(М. Акбари)*

Задача 14. Из шахматной доски вырезали 2 квадратика 2×2. Докажите, что оставшуюся часть доски всегда можно разбить на доминошки. *(Фольклор)*

Задача 15. Настя записала в тетрадь число 29 102 018. Она хочет, переставляя местами две цифры, получить как можно большее число. Какое минимальное число перестановок ей придется сделать? *(по мотивам фольклора)*

Задача 16. Серёже приснилось натуральное число и он начал прибавлять к числу его предпоследнюю цифру. После 99 таких операций он проснулся и смог вспомнить только число 56 789. Могло ли такое быть? *(из СПб олимпиад по математике)*

Второй тур

30 октября 2018 г.

Задача 17. Найдите сумму цифр числа, получаемого умножением 2018 на число, состоящее из 2018 единиц.

Задача 18. Решить ребус: БОЙ $\times$ 9 = ТУР (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 19. Из шахматной доски вырезали клетчатый прямоугольник. Всегда ли оставшуюся часть доски можно разбить на доминошки? (Доминошка — фигура, состоящая из двух соседних по стороне клеток.) *(Фольклор)*

Задача 20. Восемь школьников бросали снежки по восьми окнам. Оказалось, что в каждое окно попали хотя бы пять школьников. Докажите, что есть два школьника, вмести попавшие по всем окнам. *(по мотивам задачи Московской математической олимпиады, 1996 г.)*

Задача 21. В одной комнате сидят три человека: два нормальных и один странный курьер. Нормальные всегда говорят правду, а курьер отвечает как попало. Можно ли за два вопроса узнать, кто из них курьер? *(Фольклор)*

Задача 22. На экране компьютера горит трехзначное число. Каждую секунду к нему прибавляется его первая цифра. Докажите, что через некоторое время на экране будет гореть число 201820182018. *(Фольклор)*

Задача 23. На столе лежат 100 монет. Из них одна или две весят 2 грамма, а остальные — 1 грамм. Как на чашечных весах без гирь за 3 взвешивания определить количество монет весом 2 грамма?

Задача 24. Шахматная фигура клон делает ходы слона и коня в таком порядке: сначала она делает один ход как слон, затем два хода как конь, по-том снова один ход как слон, затем два хода как конь, и так далее. Какое наибольшее число клеток доски 6×6 может обойти клон, не побывав ни в какой клетке дважды? Начинать клон может с любой клетки, и эта клетка также будет считаться пройденной. *(из турниров «Лига Открытий»)*

Третий тур

30 октября 2018 г.

Задача 25. Решить ребус: ЛЕНТА + ПОЛОСА = СТОРОНА. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 26. Назовем два натуральных числа двойниками, если суммы их цифр равны друг другу и произведения их цифр также равны друг другу (например, 46 и 243 — двойники). Найдите все числа, у которых нет двойников. *(из Уральских турниров)*

Задача 27. Виталик написал на доске 10 двоек. Потом он делал следующее: стирал два числа и вместо них записывал сумму или произведение этих чисел. Могло ли на доске остаться только число 1002? *(Фольклор)*

Задача 28. Коля составил из фигурок L-тетрамино и симметричных пятиклеточных уголков прямоугольник 6×11, но потом одну из фигурок потерял. Докажите, что из оставшихся фигурок, использовав их все, не получится составить прямоугольник. (Фигурки можно поворачивать, переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)

(СПб олимпиада по математике 2000 г.)

Задача 29. У Сергея было 92 листа картона и 135 листов цветной бумаги. На суперсамолётик у него уходит один лист картона и один лист цветной бумаги. После того, как он сделал несколько самолётиков, листов картона осталось в 2 раза меньше, чем цветных листов. Сколько самолётиков собрал Серёжа?

Задача 30. Игорь вчетверо старше Арсения. Сумма их возрастов — 60 лет. Через сколько лет Игорь станет втрое старше Арсения?

Задача 31. Имеется по 10 монет двух типов (всего 20 монет), внешне неразличимых между собой. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, весят ли монеты разных типов одинаково? *(из турниров «Лига Открытий»)*

Задача 32. У Маши и Саши было по карточке, на этих карточках было написано одно и то же натуральное число. Маша отрезала от своей карточки последнюю цифру, а Саша две последние цифры. В итоге сумма чисел на двух Машиных карточках стала равна 50, и на Сашиных — тоже 50. А какое число было написано на карточках изначально?

(из турниров «Лига Открытий»)

Четвёртый тур

31 октября 2018 г.

Задача 33. В однокруговом футбольном турнире участвуют четырнадцать команд. Могло ли после окончания турнира оказаться, что у каждой команды количество ничьих равно количеству поражений?

Задача 34. Арсений выписал три натуральных числа, сумма которых равна 180, и заметил, что все выписанные числа — двузначные или трехзначные, и в записи каждого использована одна и та же пара цифр. Найдите все такие тройки чисел.

(XI Уральский турнир, младшая группа, 1998 г.)

Задача 35. Калькулятор «Зеленый остров» умеет выполнять две операции: вычитать из числа единицу или записывать цифры числа в обратном порядке, причем вторая операция разрешена только тогда, когда последняя цифра числа не равна нулю. За какое наименьшее число операций можно с помощью «Зелёный остров» из числа 100 получить число 1?

(XI Уральский турнир, младшая группа, 1998 г.)

Задача 36. В таблице 3×3 расставлены числа (см. рисунок). Дима и Вера вычеркнули по 4 числа, причем сумма чисел, которые вычеркнула Вера в 3 раза больше суммы чисел, вычеркнутых Димой. Какое число осталось невычеркнутым? *(из СПб олимпиад по математике)*

4	12	8
13	24	14
7	5	23

Задача 37. У Леонардо есть 130 дощечек. Из 5 дощечек он может сделать игрушечную мельницу, из 7 дощечек — пароход, из 14 дощечек — самолет. Самолет стоит 19 золотых, пароход — 8 золотых, мельница — 6 золотых. Какое наибольшее количество золотых может заработать Леонардо? *(И. И Богданов, Московская устная олимпиада для 6-7 классов, 2008 г.)*

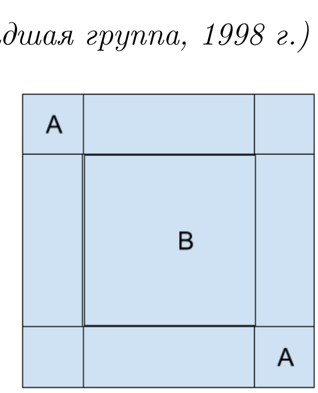
Задача 38. В царстве гномов есть столица и города. Из столицы выходит одна дорога, из остальных городов выходит по три дороги. Одна дорога соединяет два разных города. Король гномов хочет распределить дороги между пожарными, милиционерами и докторами так, чтобы на каждой дороге дежурил ровно один человек и чтобы на трёх дорогах из одного города дежурили три разных специалиста. Докажите, что у Короля ничего не получится.

(Жюри, по мотивам фольклора)

Задача 39. В классе 20 человек. Никакие три девочки не дружат с одинаковым числом мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?

(XI Уральский турнир, младшая группа, 1998 г.)

Задача 40. Прямоугольник разделен параллельными прямыми на квадраты и прямоугольники (см. рисунок). A и B — квадраты. Площадь A равна 9 кв. см. Периметр B — 36 см. Чему равна площадь исходного прямоугольника? *(К. Н. Бондаренко)*



Пятый тур

1 ноября 2018 г.

Задача 41. Существует ли тройка последовательных натуральных чисел, каждое из которых равно произведению двух простых чисел? *(Фольклор)*

Задача 42. Четыре девочки — Катя, Лена, Маша и Нина — участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен — больше, чем каждая из остальных, а Лена — 5 песен — меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето?

Задача 43. В интернате 10 жилых комнат. Жители этих комнат просыпаются по очереди. Если дверь их комнаты на месте, то они снимают дверь какой-то другой из этих комнат и уносят её в подвал. Если же дверь их комнаты унесена, то они забирают из подвала любую дверь и вешают её на место своей. Какое наибольшее количество дверей могло оказаться в подвале после того, как все проснулись? *(Ю. М. Лифшиц, XVIII Уральский турнир)*

Задача 44. Какие 500 идущих подряд натуральных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 2018 цифр?

Задача 45. В колонию, состоящую из n бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго? Если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет? *(Р. М. Ковтун, ММО–1971)*

Задача 46. Можно ли выписать в ряд натуральные числа от 1 до 10 в таком порядке, чтобы сумма любых трёх, выписанных подряд, была не больше 15? *(по мотивам фольклора)*

Задача 47. В каждой клетке доски 5×6 стоит лжец или рыцарь. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Каждый из стоящих на доске сказал: «Среди моих соседей ровно один рыцарь» (соседями считаются те, кто стоит на клетках, имеющих общую сторону). Сколько рыцарей может быть на доске? (Перечислите все возможности.) *(Жюри)*

Задача 48. Любые три соседние цифры числа делятся на 132 или 123. Какое наибольшее количество цифр может иметь это число? *(Жюри)*

2 Первая лига 5-х класса

Первый тур

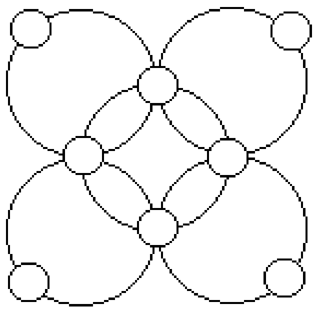
29 октября 2018 г.

Задача 49. Журнал сшит из двойных листов. Сумма номеров четырёх страниц двойного журнального листа 130. Сколько страниц в этом журнале?

(Н. И. Авилов, вариация фольклора)

Задача 50. Можно ли расставить натуральные числа от 1 до 8 в кружки фигуры так, чтобы сумма чисел расположенных на каждой из пяти окружностей была одной и той же?

(предложил Н. И. Авилов)



Задача 51. Решите ребус ТУРНИР + ОСТРОВ = МИНИБОИ. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 52. Из шахматной доски вырезали квадратик 2×2. Докажите, что оставшуюся часть доски всегда можно разбить на доминошки. (Доминошка — фигура, состоящая из двух соседних по стороне клеток.) *(Фольклор)*

Задача 53. Говорят, что если подойти к Мёбиусу 2 ноября, то он будет раздавать ленты. Первому подошедшему он даст одну ленту и десятую часть всех оставшихся, второму подошедшему даст две ленты и десятую часть оставшихся, . . . , девятому подошедшему даст девять лент и десятую часть оставшихся. Если же кто-то подойдет потом, то ему ничего не достанется. Сколько лент есть у Мёбиуса? *(Фольклор)*

Задача 54. Арсений выписал в ряд натуральные числа от 1 до 2019, затем Костя некоторым образом их переставил, пронумеровал и подписал под каждым номер, а затем Женя для каждой пары чисел (число и его номер) вычел из большего числа меньшее. Могли ли все получившиеся разности оказаться нечётными числами?

Задача 55. В столовой лежат кусочки сыра и хлеба. Если добавить ещё 20 кусков сыра, то их станет вдвое больше, чем хлеба. Сколько кусков хлеба необходимо убрать, чтобы их стало вдвое меньше, чем сыра? *(М. Акбари)*

Задача 56. Сможет ли Незнайка разрезать квадрат на три шестиугольника, два из которых равны друг другу? (Размеры квадрата могут быть любыми, резать можно не только по линиям сетки.) *(из турниров «Kostroma Open»)*

Второй тур

30 октября 2018 г.

Задача 57. Найдите сумму цифр числа, получаемого умножением 2018 на число, состоящее из 2018 единиц.

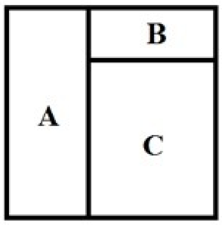
Задача 58. Решить ребус: БОЙ $\times$ 9 = ТУР (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 59. Из шахматной доски вырезали клетчатый прямоугольник. Всегда ли оставшуюся часть доски можно разбить на доминошки? (Доминошка — фигура, состоящая из двух соседних по стороне клеток.) *(Фольклор)*

Задача 60. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких один человек. Найдите сумму Костиных чисел. *(К. Кохась, СПб олимпиада по математике 2015 г.)*

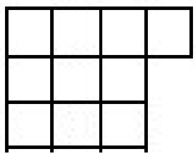
Задача 61. Найдите наибольшее число, такое, что если к нему прибавить сумму его цифр получится число 2018. *(Жюри)*

Задача 62. Витя составил из трёх прямоугольников квадрат с периметром 40 см. Периметр прямоугольника A равен 28 см, а площадь прямоугольника B — 18 см^2. Найдите площадь прямоугольника C. Ответ выразите в кв. см.



Задача 63. Из Новопетровска в Савельево Иван пошел через лес со скоростью 4 км/ч, а Фёдор пошел по дороге со скоростью 5 км/ч. Фёдор пришёл в Савельево на час позже и прошел на 15 км больше, чем Иван. Найдите расстояние от Новопетровска до Савельева через лес. *(С. В. Мигаев)*

Задача 64. Расставьте в клетках указанной фигурки числа от 5 до 14 так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были разными (доминошка это прямоугольник, состоящий из двух клеток, соседних по стороне). *(А. Чухнов, СПб олимпиада по математике 2016 г.)*



Третий тур

30 октября 2018 г.

Задача 65. Решить ребус: ЛЕНТА + ПОЛОСА = СТОРОНА. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 66. Спортсмены Женя и Серёжа любят бегать. Серёжа бежит со скоростью 6 м/с, а Женя со скоростью 4 м/с. Пробежали 10 минут, и Серёжа обогнал Жору на 1 круг. Найдите длину круга.

Задача 67. Виталик написал на доске 10 двоек. Потом он делал следующее: стирал два числа и вместо них записывал сумму или произведение этих чисел. Могло ли на доске остаться только число 301? *(Фольклор)*

Задача 68. Коля составил из фигурок L-тетрамино и симметричных пятиклеточных уголков прямоугольник 6×11, но потом одну из фигурок потерял. Докажите, что из оставшихся фигурок, использовав их все, не получится составить прямоугольник. (Фигурки можно поворачивать, переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)
(СПб олимпиада по математике 2000 г.)

Задача 69. У Сергея было 92 листа картона и 135 листов цветной бумаги. На суперсамолётик у него уходит один лист картона и один лист цветной бумаги. После того, как он сделал несколько самолётиков, листов картона осталось в 2 раза меньше, чем цветных листов. Сколько самолётиков собрал Серёжа?

Задача 70. Игорь вчетверо старше Арсения. Сумма их возрастов — 60 лет. Через сколько лет Игорь станет втрое старше Арсения?

Задача 71. Имеется по 10 монет двух типов (всего 20 монет), внешне неразличимых между собой. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, весят ли монеты разных типов одинаково? *(из турниров «Лига Открытий»)*

Задача 72. У Маши и Саши было по карточке, на этих карточках было написано одно и то же натуральное число. Маша отрезала от своей карточки последнюю цифру, а Саша две последние цифры. В итоге сумма чисел на двух Машиных карточках стала равна 50, и на Сашиных — тоже 50. А какое число было написано на карточках изначально?
(из турниров «Лига Открытий»)

Четвёртый тур

31 октября 2018 г.

Задача 73. Арсений носит электронные часы, которые показывают время в формате ЧЧ:ММ:СС, то есть в 14 часов 23 минуты 57 секунд они покажут 14:23:57. Арсений заинтересовался, каких секунд в сутках больше: тех, когда часы показывают, что минут больше, чем секунд (например, 04:45:14), или тех, когда минут меньше, чем секунд (например, 23:37:59). А как думаете вы? *(Фольклор)*

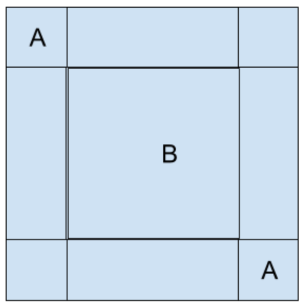
Задача 74. В таблице 3×3 расставлены числа (см. рисунок). Дима и Вера вычеркнули по 4 числа, причем сумма чисел, которые вычеркнула Вера в 3 раза больше суммы чисел, вычеркнутых Димой. Какое число осталось невычеркнутым? *(из СПб олимпиад по математике)*

4	12	8
13	24	14
7	5	23

Задача 75. Некто имеет работников и деньги. Если он даст каждому работнику 5 монет, у него останется 30, а если 7, то не хватит 30. Спрашивается, сколько у него работников? *(рукопись Мюнхенского собрания)*

Задача 76. У Леонардо есть 130 дощечек. Из 5 дощечек он может сделать игрушечную мельницу, из 7 дощечек – пароход, из 14 дощечек – самолет. Самолет стоит 19 золотых, пароход – 8 золотых, мельница – 6 золотых. Какое наибольшее количество золотых может заработать Леонардо? *(И. И Богданов, Московская устная олимпиада для 6-7 классов, 2008 г.)*

Задача 77. Прямоугольник разделен параллельными прямыми на квадраты и прямоугольники (см. рисунок). А и В — квадраты. Площадь А равна 9 кв. см. Периметр В — 36 см. Чему равна площадь исходного прямоугольника? *(К. Н. Бондаренко)*



Задача 78. На доске записано умножение двух двузначных чисел. Ученик заменил каждую цифру новой, большей предыдущей на одно и то же число. Вот что получилось (см. пример). Какие числа были записаны первоначально? *(из Ижевских олимпиад)*

$$\begin{array}{rrr}
 & 4 & 3 \\
 & 5 & 4 \\
\hline
 & 6 & 4 \\
8 & 5 & \\
\hline
8 & 9 & 4
\end{array}$$

Задача 79. Катя и ее друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка — одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей пять. А сколько девочек?

Задача 80. Виктор и Кирилл плавают в бассейне по соседним дорожкам. Стартуют они одновременно с противоположных концов бассейна, «встречаются» и плывут дальше. Доплыв до конца дорожки, они мгновенно разворачиваются, опять «встречаются» и так далее. Виктор проплывает дорожку за 12 мин, а Кирилл за 14 мин. Через какое время после старта Виктор впервые догонит Кирилла, плывя с ним в одном направлении? *(XXI Турнир Архимеда)*

Пятый тур

1 ноября 2018 г.

Задача 81. Нина, Петя и Вася разобрали карточки, на которых написаны числа от 5 до 11. Нина взяла три карточки, а Петя и Вася — по две карточки. Умная Нина посмотрела на свои карточки и заявила Васе: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!» Какие карточки у Нины? *(Фольклор)*

Задача 82. Четыре девочки — Катя, Лена, Маша и Нина — участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен — больше, чем каждая из остальных, а Лена — 5 песен — меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето?

Задача 83. Можно ли выписать в ряд натуральные числа от 1 до 10 в таком порядке, чтобы сумма любых трёх, выписанных подряд, была меньше 15? *(по мотивам фольклора)*

Задача 84. В интернате 10 жилых комнат. Жители этих комнат просыпаются по очереди. Если дверь их комнаты на месте, то они снимают дверь какой-то другой из этих комнат и уносят её в подвал. Если же дверь их комнаты унесена, то они забирают из подвала любую дверь и вешают её на место своей. Какое наибольшее количество дверей могло оказаться в подвале после того, как все проснулись? *(Ю. М. Лифшиц, XVIII Уральский турнир)*

Задача 85. В колонию, состоящую из 200 бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго? Если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет? *(Р. М. Ковтун, ММО–1971)*

Задача 86. Какие 500 идущих подряд натуральных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 2018 цифр?

Задача 87. Любые три соседние цифры числа делятся на 132 или 123. Какое наибольшее количество цифр может иметь это число? *(Жюри)*

Задача 88. На каждой перемене Арсений съедает по две конфеты. Сколько конфет он съел за неделю с понедельника по пятницу включительно, если за это время прошло 28 уроков (уроки каждый день идут подряд, без «окон», и их необязательно каждый день равное количество) *(Жюри)*

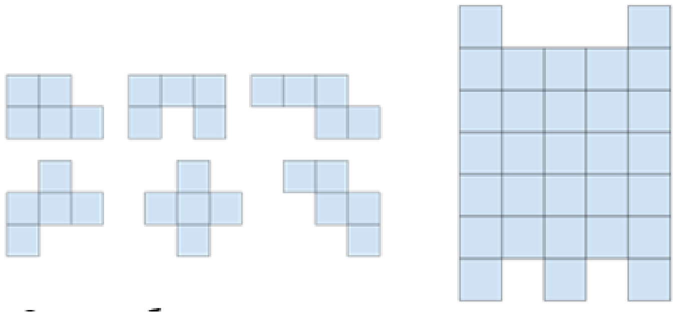
3 Лига 6-х класса

Первый тур

28 октября 2018 г.

Задача 89. Клара посчитала сумму цифр, с помощью которых записывается сегодняшняя дата: 28.10.2018. Сколько в этом году дат с такой же суммой цифр (не учитывая сегодня)? *(по мотивам фольклора)*

Задача 90. У Андрея есть 6 разных плиток, показанных на рисунке. Сможет ли он собрать узор как на рисунке справа? Нужно использовать все плитки. Все плитки можно поворачивать и переворачивать. *(К. Н. Бондаренко)*



Задача 91. В настольной игре у героев есть 3 способности: сила, ум, отвага. Каждый игрок может выбрать для своего героя одну или две способности. Играют 32 игрока. Известно, что отважных героев (т. е. всех, имеющих способность отвага) в два раза больше умных и в k раз меньше, чем сильных (k — целое число, большее двух). Сколько игроков выбрали одну способность для героя, если известно, что игроков, выбравших 2 способности, на 2 больше, чем отважных? *(ПВГ–2015, 8 класс, заочный тур)*

Задача 92. Кирилл написал на доске всевозможные 9-значные числа, в записи которых встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу. Мефодий выбрал из них самое большое и самое маленькое и стёр их. Потом он выбрал самое большое и самое маленькое из оставшихся чисел и тоже их стёр. Мефодий повторял свои действия до тех пор, пока на доске не осталось два числа. Какие это числа? *(из материалов Кировской ЛМШ–2010, 7 класс)*

Задача 93. В строчку выписаны 2018 чисел, каждое из которых больше предыдущего на одну и ту же величину. Может ли среди выписанных чисел быть ровно 102 целых? *(Азиатско-Тихоокеанская олимпиада, 1999, колоссальное упрощение)*

Задача 94. Имеется 200 конфет: по 100 ирисок и карамелек. По кругу сидят 100 школьников. Каждому из них раздали 2 ириски или 2 карамельки. Каждую минуту каждый школьник передает соседу слева одну ириску, если она у него есть. Если ириски нет, то школьник передаёт карамельку. Докажите, что через несколько минут у всех школьников будет по одно ириске и одной карамельке.

Задача 95. Из листа бумаги вырезали многоугольник (возможно, треугольник), имеющий ось симметрии. После того, как его сложили по оси симметрии, вновь образовался многоугольник (возможно, треугольник), имеющий ось симметрии. После того, как и его сложили по оси симметрии, образовался треугольник. Сколько сторон могло быть у исходного многоугольника?

Задача 96. Натуральное число n назовём небольшим, если в его десятичной записи встречаются только цифры 0, 1 или 2. При каком наименьшем k любое натуральное число можно представить в виде суммы не более k небольших чисел?

Второй тур

29 октября 2018 г.

Задача 97. Арсений вчера записал в блокнот 5 целых чисел. Рано утром он вычислил все возможные попарные суммы. У него получилось: 22, 11, 6, -1, 10, 9, 4, 16, 15, 20. Выясните, какие числа записал Арсений.

Задача 98. Четыре гномика поселились в клетках квадрата 2×2. Утром гномики, живущие в соседних по сторонам клетках, пожали друг другу руки. На следующий день они поселились в домики по-другому и опять пожали руки соседям. На третий день всё повторилось. Могло ли оказаться так, что каждый пожал каждому руку ровно 2 раза?

(из материалов Адыгейской ЛМШ)

Задача 99. Решите ребус ТУРНИР + ОСТРОВ = МИНИБОИ. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 100. Из шахматной доски вырезали 2 квадратика 2×2. Докажите, что оставшуюся часть доски всегда можно разбить на доминошки. *(Фольклор)*

Задача 101. Найдите наименьшее число, больше 1000, оканчивающееся на те же три цифры, что и число 512 и кратное 512.

Задача 102. Игорь выставляет на шахматную доску коней так, чтобы они не били друг друга. У него нашлись только 31 фигурка. Сколькими способами он сможет их все выставить на доску, чтобы желаемое условие выполнялось? *(XI Южный математический турнир, Старт-лига, 2016 г.)*

Задача 103. На окружности расположены 1024 белых домика. Тридцать два гнома красят дома в синий цвет (изначально гномики могут стоять у любого дома, но не красят его). За один ход первый гном перемещается по окружности вправо или влево, второй — на два дома вправо или влево, третий — на 3 и так далее, тридцать второй — на 32. И одновременно красят дом, рядом с которым оказались. Если несколько гномов оказалось около одного дома, то они вместе его красят. В некоторый момент оказалось, что все дома синие. Докажите, что хотя бы один гном за это время красил уже покрашенный дом.

(К. Н. Бондаренко, С. В. Мигаев, М. Акбари)

Задача 104. На турнир приехали сто школьников 5 и 6 классов. Оргкомитет выяснил следующее: любых шести школьников можно расселить по двум 3-местным номерам так, что в каждом номере оказались все знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть среди школьников? *(из материалов Кировской ЛМШ–2010)*

Третий тур

30 октября 2018 г.

Задача 105. Решить ребус: БОИ + БЛИЦ = ПАУЗА. (Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам, разные — разным.) *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 106. Назовем два натуральных числа двойниками, если суммы их цифр равны друг другу и произведения их цифр также равны друг другу (например, 46 и 243 — двойники). Найдите все числа, у которых нет двойников. *(из Уральских турниров)*

Задача 107. Все шестизначные числа, запись которых состоит только из цифр 1, 2, 3, покрасили в красный, синий и зеленый цвета. Каждые два числа, различающиеся во всех шести разрядах, раскрашены в разный цвет. Известно, что число 111111 — красное, а 211111 и 222222 — синие. Какой цвет имеет число 123123? *(давно рассказал И. С. Петренко)*

Задача 108. Найдите наименьшее n такое, что натуральные числа от 3 до n можно расположить в ряд так, что сумма любых двух соседних будет равна квадрату натурального числа. *(К. Н. Бондаренко, вариация фольклора)*

Задача 109. Дядька Черномор набирает себе новую банду. На кастинг пришли 33 гномика и устроили драку. Каждый из них подбил один глаз другому гномику, и у каждого гномика был подбит ровно один глаз. Кроме того, для любых трех гномиков можно указать четвертого, который подбил глаз одному из них. Докажите, что Черномор может выгнать не более 5 гномиков, если он хочет всех оставшихся гномиков разделить на два отряда так, чтобы ни один гномик не попал в один отряд со своим обидчиком. *(И. Ф. Акулич, III этап ВсОШ по математике 1996/1997 гг., в обработке)*

Задача 110. На экране компьютера горит трехзначное число. Каждую секунду к нему прибавляется его первая цифра. Докажите, что через некоторое время на экране будет гореть число 201820182018.

Задача 111. В коридоре длиной 100 метров в начале и в конце из стены торчит по четыре провода. Известно, что каждый провод начинается в начале коридора и заканчивается в конце коридора, но какой провод какой — неизвестно (провода проложены внутри стены). У электрика Васи есть маленький прибор, позволяющий проверить, течёт ли ток между двумя точками. Вася может соединять провода как угодно между собой (можно связывать вместе не только два, но и три, и четыре провода, но только в одном конце коридора). Вася хочет выяснить, какой провод какой, но ещё хочет пройти как можно меньше. Найдите расстояние, которое пройдёт Вася, и докажите, что меньше он пройти не может. *(сообщил К. С. Иванов)*

Задача 112. В одной комнате сидят три человека: два нормальных и один странный курьер. Нормальные всегда говорят правду, а курьер отвечает как попало. Можно ли за два вопроса узнать, кто из них курьер? *(Фольклор)*

Четвёртый тур

31 октября 2018 г.

Задача 113. 9 гномов поселились в 9 комнатах, расположенных в виде квадрата 3×3. Как только они поселились, каждый пожал руки своим соседям (соседи по стороне). На второй день они поселились по-другому, и каждый пожал руки своим новым соседям. На третий день они снова переселились, и снова, каждый пожал руки каждому своему соседу. Докажите, что после трёх дней найдутся два гномика, которые не жали руки друг другу. *(К. Н. Бондаренко)*

Задача 114. Остап Бендер организовал раздачу слонов населению. Явилось двадцать человек. Остап построил их по кругу, дал первому одного слона, его соседу слева — тоже одного слона, затем одного человека пропустил, следующему дал одного слона, пропустил двоих, следующему дал двух слонов, пропустил троих, следующему дал трёх слонов и т. д., пока не раздал всех 2018 имеющихся у него слонов. Скольким желающим не досталось ни одного слона?
(X Уральский турнир, 1997 г.)

Задача 115. В классе 20 человек. Никакие три девочки не дружат с одинаковым числом мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?
(XI Уральский турнир, младшая группа, 1998 г.)

Задача 116. В однокруговом футбольном турнире участвуют пятнадцать команд. Могло ли после окончания турнира оказаться, что у каждой команды количество ничьих равно количеству поражений? *(по мотивам задачи XI Уральского турнира, младшая группа, 1998 г.)*

Задача 117. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только ровно по 10 камней на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Как с помощью этих весов найти пару камней, про которые точно будет известно, какой из них тяжелее? *(С. Л. Берлов, XLV Уральский турнир, 2015 г.)*

Задача 118. Калькулятор «Зеленый остров» умеет выполнять две операции: вычитать из числа единицу или записывать цифры числа в обратном порядке, причем вторая операция разрешена только тогда, когда последняя цифра числа не равна нулю. За какое наименьшее число операций можно с помощью «Зелёный остров» из числа 100 получить число 1?
(XI Уральский турнир, младшая группа, 1998 г.)

Задача 119. В таблице 3×3 расставлены числа (см. рисунок). Дима и Вера вычеркнули по 4 числа, причем сумма чисел, которые вычеркнула Вера в 3 раза больше суммы чисел, вычеркнутых Димой. Какое число осталось невычеркнутым? *(из СПб олимпиад по математике)*

4	12	8
13	24	14
7	5	23

Задача 120. В царстве гномов есть столица и города. Из столицы выходит одна дорога, из остальных городов выходит по три дороги. Одна дорога соединяет два разных города. Король гномов хочет распределить дороги между пожарными, милиционерами и докторами так, чтобы на каждой дороге дежурил ровно один человек и чтобы на трёх дорогах из одного города дежурили три разных специалиста. Докажите, что у Короля ничего не получится.
(Жюри, по мотивам фольклора)

Пятый тур

1 ноября 2018 г.

Задача 121. Каково наибольшее возможное количество последовательных натуральных чисел, каждое из которых равно произведению двух простых чисел?

(по мотивам фольклора)

Задача 122. Миша из 63 карточек, на которых написаны только цифры 2, 3 и 4 составил число. Оказалось, что карточек, на которых написана цифра 2, на 22 больше, чем тех, на которых написана цифра 4. Помогите Мише найти остаток от деления его числа на 9.

(по мотивам задачи олимпиады «Ломоносов»)

Задача 123. В интернате 10 жилых комнат. Жители этих комнат просыпаются по очереди. Если дверь их комнаты на месте, то они снимают дверь какой-то другой из этих комнат и уносят её в подвал. Если же дверь их комнаты унесена, то они забирают из подвала любую дверь и вешают её на место своей. Какое наибольшее количество дверей могло оказаться в подвале после того, как все проснулись? *(Ю. М. Лифшиц, XVIII Уральский турнир)*

Задача 124. Сколько существует семизначных чисел, в которых хотя бы одна цифра повторяется ровно три раза?

Задача 125. В каждой клетке доски 5×6 стоит лжец или рыцарь. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Каждый из стоящих на доске сказал: «Среди моих соседей — ровно один рыцарь» (соседями считаются те, кто стоит на клетках, имеющих общую сторону). Сколько рыцарей может быть на доске? (Перечислите все возможности.) *(Жюри)*

Задача 126. В стране 20 городов и 14 дорог, причем из каждого города выходит хотя бы одна. Докажите, что найдутся 6 дорог, оканчивающихся в 12 различных городах.

(ММО США, 1989)

Задача 127. Шелдон поехал на конференцию, разумеется, на поезде. На весь путь он потратил t минут (меньше часа). Ещё он заметил, что на станциях отправления и прибытия угол между часовой и минутной стрелками равнялся t градусам. Найдите время, которое Шелдон был в пути.

(С. И. Токарев, ВсОШ по математике, зональный этап, 2000 г., в обработке)

Задача 128. На полке в камере хранения стоят 10 чемоданов, занумерованных в некотором порядке числами от 1 до 10. Чемоданы имеют разную ширину и стоят необязательно вплотную друг к другу и к краям полки. Кладовщик снимает с полки чемодан № 1, а затем ставит его обратно на полку в самое левое из возможных положений, не сдвигая другие чемоданы. Затем он берет чемодан № 2 и ставит его в самое левое возможное положение, и т. д. После перестановки чемодана № 10 кладовщик снова переходит к чемодану № 1, и т. д. Докажите, что после 100 операций кладовщик будет ставить каждый чемодан на то место, откуда его только что взял. (Если очередной чемодан пришлось поставить на место, откуда его взяли, это всё равно засчитывается как выполненная операция.)

(А. И. Храбров, СПб олимпиада по математике 2016, второй тур, 6 класс)

4 Решения задач

1. В течение года сумма цифр года не изменяется, поэтому будем рассматривать только месяцы и дни, т. е. с суммой цифр — 11. Можно заметить, что в январе и в октябре таких дат только две: 19.01 и 28.01, 19.10 и 28.10. Далее в июле и в августе подходящих дат по четыре: 4.07, 13.07, 22.07 и 31.07, 3.08, 12.08, 21.08 и 30.08. А в остальных месяцах по 3. Всего $2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 36$.

2. Упорядочим арбузы по возрастанию. Левые три арбуза весят 25 кг, последние три — 35 кг. Значит, арбузы посередине весят в сумме $100 - (25 + 35) = 40$ кг. Если их не больше трех, то они перевешивают три самых тяжелых арбуза, чего не может быть. Если их пять или больше, то три самых легких из них весят не больше $40 \cdot 3 : 5 = 24$ кг, чего опять же не может быть. Значит, посередине ровно 4 арбуза, а всего арбузов 10.

3. Найдём сторону большого квадрата. По вертикали: $24 + 2 \cdot (24 \cdot 3) = 168$. Тогда неизвестный отрезок равен: $(168 - 24 \cdot 2) : 2 = 60$.

4. Мухоморов было собрано столько же, сколько вместе собрали грибов Наф-Наф и Нуф-Нуф. Это значит, что Ниф-Ниф собрал столько же мухоморов, сколько Наф-Наф и Нуф-Нуф собрали поганок. Отсюда следует, что Наф-Наф собрал $26 - 17 = 9$ поганок.

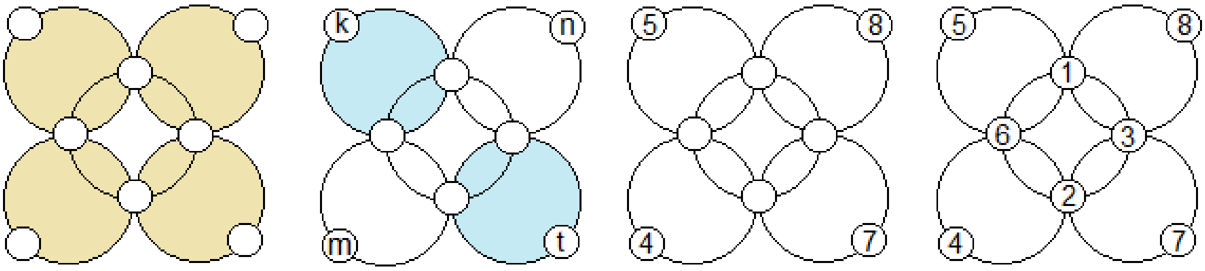
5. Карточки с числами от 25 до 50 должны быть бОльшими числами в своих парах, чтобы выполнялось условие. Но 26 чисел не могут быть бОльшими в своих парах, т. к. пар всего 25.

6. Предположим, что среди людей есть как рыцари, так и лжецы. Тогда для рыцаря фраза должна быть верной, значит, всего рыцарей не больше 6, тогда лжецов хотя бы 15. Значит, для лжеца часть фразы «...не меньше десяти лжецов» верна, поэтому не верна должна быть часть «не больше пяти рыцарей», откуда рыцарей ровно 6, и такой случай действительно возможен. Если нет рыцарей, то лжецов больше 20 и все они говорят правду. Если нет лжецов, то рыцарей больше 20 и все они говорят неправду, оба этих случая невозможны.

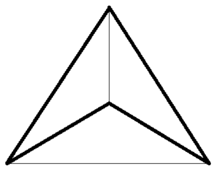
7. Чисел, начинающихся на 1 и на 9, на 2 и на 8, на 3 и на 7, на 4 и на 6 поровну (каждого вида по 8!). Значит сначала сотрут все числа начинающиеся на 1 и 9, потом все числа начинающиеся на 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6 и останутся числа начинающееся на 5. Чисел начинающихся на 5 и со вторым разрядом 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6 поровну (по 7! каждого вида). Значит в конце остались числа начинающееся на 54 и 56 причем первое наибольшее среди начинающихся на 54, а второе наименьшее среди начинающихся на 56 — 549876321 и 561234789.

8. Сумма всех чисел равна $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 + 4 \cdot 2 + 5 + 6 = 30$. Если число в самой левой клетке x, получим уравнение $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 32$, $x = 6$. Тогда в самом левом столбце сумма $6 = 6$, во втором $7 = 3 + 4$ или $5 + 2$, в третьем $8 = 1 + 2 + 5 = 2 + 2 + 4$ или $8 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4$ соответственно (в четвёртом столбце — все остальные числа). Тогда разных расстановок: $2 \cdot 6 \cdot 12 + 2 \cdot 3 \cdot 12 + 2 \cdot 6 \cdot 12 + 2 \cdot 3 \cdot 12 = 432$.

9. Сумма натуральные числа от 1 до 8 равна 36. Пусть сумма чисел в кружках каждой из пяти окружностей S. Заметим на рисунке слева, что если найти сумму чисел, расположенных в четырех закрашенных желтым окружностях, то дважды будут посчитаны только числа центральной окружности, поэтому справедливо уравнение $4S - S = 36$, поэтому $S = 12$. Далее, на рисунке рядом заметим, что на двух синих окружностях расположены шесть чисел из восьми, то сумма чисел m и n равна 12, но тогда и сумма чисел k и t тоже равна 12. В нашем наборе как раз имеются две пары чисел суммой 12 — это 4 и 8, 5 и 7. Расставив эти числа, уже нетрудно расставить остальные.



10. Да, могли. Пример на рисунке (выделены рукопожатия первого дня, в другие дни — повёрнутые на 60°.)



11. Посмотрим на разряды десятков: $И = 0$, но тогда $Р + В = 10$ и $1 + 0 + О$ не равно О, или $И = 9$ и $Р + В$ дают переход через десяток, но $Р + В < 19$ — противоречие. Решений нет.

12. За 9 дней Мёба раздаст все ленты, в последний день отдаст 9 лент и десятую часть всех оставшихся, то есть 10 лент (9/10 часть равна 9). Аналогично рассуждая, получим, что на 8й день он отдаст 8 лент и десятую часть оставшихся, то есть 9/10 часть равна $8 + 10 = 18$ лент — было 20 лент (отдал 10)... В первый день останется 80 лент, а всего было 90 лент. Отметим, что каждый день он отдавал ровно 10 лент.

13. Пусть кусочков хлеба x, тогда кусочков сыра $2x-20$. Тогда нужно убрать $x-(2x-20) : 2 = 10$ кусочков хлеба.

14. Квадратики находятся либо в непересекающихся столбцах ширины 2, либо в строчках ширины 2. Отсюда очевидно замощение.

15. Наибольшее число из этого набора цифр 98 221 100. Ни одна цифра исходного числа не стоит на своём месте. Меняя местами 2 цифры можно поставить на нужные места не более 2-х цифр, то есть перестановок должно быть хотя бы $8 : 2 = 4$. Но только 2 пары цифр (выделены и подчеркнуты) можно поменять, чтобы все 4 оказались на своих местах после перестановок (29 **102** 018). Значит перестановок хотя бы 5. Можно менять, например, следующие пары (после двух перестановок показанных ранее): **29** 201 108, 9**2** 2**0**1 108, 9**0** 221 10**8**.

16. Найдём числа, которые были перед числом 789 (посмотрим на три последние цифры): 781, 774, 768, 762, 757, 752, 748, 744, 740, 737, 734, 731, 729–721. Совершено менее 99 операций, но число 56 721 не могло получится в результате данных операций: $71 * +1 \leq 720 < 721$. Противоречие. Значит, такого не могло быть.

17. Произведение данных чисел равно 224222...21998 (в числе 2014 двоек). $2 \cdot 2 + 4 + 2 \cdot 2014 + 1 + 9 + 9 + 8 = 4063$.

18. $Б = 1, О = 0$, дальше перебором находим 5 решений (БОЙ: 103, 104, 106, 107, 108).

19. Если прямоугольник нечётной площади, то и площадь оставшейся части нечётная. В этом случае очевидно, что нельзя. Если прямоугольник чётной площади, то хотя бы одна из его сторон чётной длины. Выкладываем по чётной стороне доминошки, параллельно ей, и так заполняем полосу шириной, равной длине чётной стороны. Оставшаяся часть разбивается на прямоугольники 1×8, которые, очевидно, разбиваются на доминошки.

20. Берём самого меткого школьника, он попал в не меньше, чем 5 окон. Докажем, что из остальных семи школьников найдётся такой, который попал в остальные 3 окна. Допустим, что это не так. Тогда каждый из семи попал в не более, чем два окна из оставшихся, т. е. на всех было не более $7 \cdot 2 = 14$ попаданий по трём окнам. Но в каждое окно попали не менее пяти раз, значит в три окна должны были попасть не менее $3 \cdot 5 = 15$ раз. Противоречие.

21. Да, можно. Сначала спрашиваем одного: «Твой сосед курьер?» Если он отвечает положительно, то третий точно нормальный, и от него мы сможем узнать правду. Если ответ отрицательный, то тот, про кого спрашивают, точно нормальный. У него и узнаём информацию.

22. С 1009 все числа задаются однозначно. Несложно заметить, что это число получается (прибавляя каждый раз однозначное число превысим 1000, но не превысим 1008). Дальше прибавляться будет единица, то есть у нас всегда будут числа вида 199...9, после которых будут числа вида 200...000, а дальше переберутся все чётные до 29...98, внутри которых и будет наше желаемое число.

23. Обозначим монету весом 2 грамма — (2). Разделим монеты на 2 части по 50 монет и взвесим их. Если чаши уравновесились, то монет (2) поровну на чашах, т. е. две. Если чаши не равны, то берём монетки с тяжелой чаши (на второй чаше все монетки весом 1 грамм) и делим их на 2 группы по 25. Если чаши уравновесились, то аналогично, монет (2) — две. Если нет, то это означает, что все монетки (2) на тяжелой чаше (одна или две монетки). Добавим на вторую, легкую чашу, 2 монеты весом 1 грамм. Тогда если чаши уравновесились, то монеток (2) две, если чаша с 27 монетами перевесит, то была одна монета (2).

24. Раскрасим доску в шахматном порядке. Пусть, не умаляя общности, клон начинает путь с белой клетки. Тогда цвета его клеток идут в таком порядке: Б–Б–Ч–Б–Б–Ч–Б–Б–Ч и т. д. В самом деле, за два хода как конь клон возвращается на клетку белого цвета и делает лишний ход Б–Б. Поэтому после 27 посещенных клеток клон пройдет по всем белым клеткам, и перейти на 28-ю клетку (а она тоже должна быть белого цвета) не сможет. Пример приведен на картинке, клетки пронумерованы в порядке обхода клона, клетка с номером 1 — та, с которой он начинает.

	26	24	16		13
25		17	12	14	
27	23	15	20	18	11
22		19	3	10	6
	2	21	5		8
1		4	9	7	

25. $С = 1, А = 0$. $Т < 9$, иначе $Н = 0$, тогда нет перехода через десяток в разряде сотен и значит $Н = 0$. Противоречие.

26. 2 и числа, состоящие из одинаковых цифр 1, 3, 5 и 7. Если в числе не все цифры одинаковые и на конце не ноль, то двойником будет число, записанное этими же цифрами в обратном порядке. Если же число оканчивается на ноль, то двойником будет число, получившееся из данного добавлением нуля справа. Рассмотрим теперь числа из одинаковых цифр. Если эти цифры 4, 6 или 8, то заменяем каждую из них на 22, 321 и 4211 соответственно. Если же эта цифра 2 и она повторяется больше одного раза, то каждые две подряд идущие двойки можно заменить на 4. Предположим, однозначные простые и единица имеют двойников. Тогда произведение цифр равно самому числу, а сумма состоит хотя бы из двух слагаемых, которые, получается, могут быть только единица и число, значит, сумма больше произведения. Противоречие. Рассмотрим числа, состоящие только из 1, 3, 5, 7 (не меньше 2 цифр). Тогда число-двойник может состоять из этой же цифры и единицы. Но если заменить хоть одну цифру на единицу, то сумма уменьшится, а если все единицы, то число задаётся однозначно.

27. Заметим, что все числа на доске всегда чётные. Число 1002 могло появиться как произведение чисел, но $1002 = 2 \cdot 501$ (такого не могло быть), либо как сумма. Одно из слагаемых не делится на 4 (иначе бы 1002 делилось бы на 4). Тогда если это 2, то, даже перемножив остальные

9 двоек, получим $2^9 = 512 < 1000$. Если это $2^k + 2 \leq 514$, то произведение остальных $2^{9-k} \leq 256$, т. к.$k \geq 1$, и $514 + 256 = 770 < 1002$.

28. Прямоугольник 6×11 состоит из 66 клеток. Если потерялся пятиклеточный уголок, то суммарная площадь оставшихся уголков равна 61 клетке. Так как число 61 простое, то из этих уголков можно сложить лишь прямоугольник 1×61. Но это невозможно, так как в прямоугольник 1×61 не влезет ни один из уголков.
Если потерялся четырехклеточный уголок, то суммарная площадь оставшихся уголков равна 62 клеткам. Так как $62 = 2 \cdot 31$, а числа 2 и 31 — простые, то из оствшихся уголков можно сложить только прямоугольник 1×62 или прямоугольник 2×31. Заметим, что прямоугольник площади 62 невозможно сложить только из четырехклеточных уголков, поскольку 62 не делится на 4. Значит, обязательно придется использовать пятиклеточные уголки. Но это невозможно, так как ни в прямоугольник 1×62, ни в прямоугольник 2×31 пятиклеточный уголок не помещается.

29. Пусть Сергей собрал x самолётиков. Тогда составим уравнение $2 \cdot (92 - x) = 135 - x, x = 49$.

30. Сейчас им 12 и 48 лет. Разница в возрасте сохраняется и равна 36 лет. Когда Арсений будет в три раза старше, возраст Игоря будет равен половине разницы лет, т. е. 18 лет.

31. Можно. Разобьем все монеты на две кучи по 10 монет и взвесим их между собой. Если получилось неравенство, то разные типы точно весят по-разному. Пусть получилось равенство. Тогда в каждой куче по 5 монет первого типа и по 5 монет второго типа. Возьмем одну кучу, разделим ее на две кучи по 5 монет и взвесим их между собой. Теперь монеты первого типа точно разошлись по кучам в разном количестве, так как в сумме их 5. Поэтому, если и на этот раз получилось равенство, то разные типы весят одинаково. Если же получилось неравенство, то разные типы весят по-разному.

32. Обозначим число на карточках как $\overline{Xab}$, где X — число, а a и b — цифры. Тогда условие можно переписать как $\overline{Xa} + b = 50, X + \overline{ab} = 50$. Вычтем из второго равенства первое. Получим $9a - 9X = 0$. Значит, $a = X$. Поэтому X — тоже цифра, такая же, как a. Подставим $X = a$ в первое равенство: $11a + b = 50$. Так как b — цифра, то она не больше 11, поэтому она равна остатку числа 50 при делении на 11. Значит, $b = 6, a = 4$, а исходное число равно 446.

33. Нет, так как количество матчей должно делиться на три, а их $14 \cdot 13 : 2 = 91$.

34. Может быть лишь два варианта: 2-значное, 2-значное, 2-значное и 2-значное, 2-значное, 3-значное. Если три двузначных, то минимум два числа из них будут равны. Если равны все три, то очевидно, что тройка $60, 60, 60$. Если же нет, то обозначим одну цифру a, вторую b. Известно, что $2a + b$ должно оканчиваться на ноль. Подходят пары 1 и 8, 2 и 6, 3 и 4, 4 и 2, 5 и 0, 6 и 8, 7 и 6, 8 и 4, 9 и 2. Перебором из них получаются лишь варианты чисел $81, 81, 18$ и $48, 48, 84$. Теперь рассмотрим вариант с трёхзначным числом. Очевидно, что первая цифра трёхзначного числа 1, так как иначе сумма больше 200. Значит, в двузначном числе есть цифра 1 и ещё какая-то цифра a. Перебирается три варианта: когда трёхзначное число $\overline{1aa}, \overline{1a1}$ и $\overline{11a}$. Подходящих вариантов нет. Значит, всего существует три такие тройки.

35. Можно спуститься до 91, вычитая 1, потом получить 19 и спускаться дальше до 1 — за 28 операций. Доказывается, что перестановка не уменьшает количество операций.

36. Сумма всех чисел равна 110. Вычеркнутые числа в сумме делятся на 4. Посмотрим на остатки при делении на 4. Значит осталось число 14.

37. На один самолёт идут те же 14 дощечек, что и на два парохода, но самолёт приносит больший доход. Поэтому не имеет смысла делать более одного парохода. Из 15 дощечек можно сделать три мельницы (доход 18 золотых) или самолёт (доход 19 золотых, а лишняя дощечка не повредит). Поэтому имеет смысл делать не более двух мельниц. Значит, на пароходы и мельницы папе Карло следует потратить не более $7 + 2 \cdot 5 = 17$ дощечек. Поэтому самолётов надо сделать 8 или 9. Во втором случае мы получим только 9 самолётов, в первом помимо 8 самолётов дощечек хватит еще на две мельницы и пароход (что стоит дороже самолёта). Итого папа Карло заработает $8 \cdot 19 + 2 \cdot 6 + 8 = 172$ золотых.

38. Пусть из столицы выезжает курьер. Курьер проезжает по дороге из столицы типа А, потом едет по дороге типа Б, потом по дороге типа А и потом по дороге типа Б, и т. д. Несложно заметить, что вернуться в город, в котором мы уже были, нельзя, а бесконечно ездить по городам тоже нельзя. Противоречие.

39. Пусть в классе n мальчиков, тогда девочки (их $20 - n$) могут дружить с $0, 1, 2, \ldots, n$ мальчиками ($n + 1$ вариант). Девочек с одинаковым числом знакомых не более 2. Чем больше девочек, тем меньше мальчиков и тем меньше вариантов количества знакомых. То есть как можно больше вариантов должны быть ровно у двух девочек, тогда $20 - n \leq 2 \cdot (n + 1)$, $n \geq 6$. Значит, в классе $20 - 6 = 14$ девочек (пример легко строится).

40. Из того, что A — квадраты, следует, что стороны B на равном расстоянии от сторон исходного квадрата, это расстояние равно 3. Сторона B равна $36 : 4 = 9$. Тогда сторона исходного квадрата $3 + 9 + 3 = 15$. Площадь квадрата равна $15 \cdot 15 = 225$ (кв. ед.

41. Наименьшая такая тройка: $33 = 3 \cdot 11, 34 = 2 \cdot 17, 35 = 5 \cdot 7$. Ещё несколько примеров: $85 = 5 \cdot 17, 86 = 2 \cdot 43, 87 = 3 \cdot 29$; $93 = 3 \cdot 31, 94 = 2 \cdot 47, 95 = 5 \cdot 19$. Можно отметить, что в каждой тройке из примеров все простые разные.

42. Посчитаем количество выходов на сцену всех девочек, оно должно делиться на 3, т. к. каждую песню пели 3 человека. Из условия следует, что Маша с Ниной спели либо 6 и 6, либо 7 и 7, либо 7 и 6 песен. Всего выходов будет либо $8 + 5 + 6 + 6 = 25$, либо $8 + 5 + 7 + 7 = 27$, либо $8 + 5 + 7 + 6 = 26$. Подходит только 27, значит было спето $27 : 3 = 9$ песен.

43. Заметим, что каждый проснувшийся житель меняет четность количества дверей в подвале. Значит, после 10 проснувшегося жителя количество дверей в подвале будет четным. Если первым проснулся житель комнаты A и снял дверь с комнаты B, то, когда проснется человек B, количество дверей в подвале уменьшится на 1. Таким образом, все 10 дверей не могут оказаться в подвале, а значит, там будет не более 8 дверей. Пусть жильцы просыпаются, например, в таком порядке: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; и относят в подвал двери в таком: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Последний просыпается житель комнаты № 1 и приносит себе дверь из подвала.

44. Если среди чисел не будет пятизначных, то выписано будет не более $500 \cdot 4 = 2000$ цифр. Если есть пятизначные, то не будет трёхзначных, т. к. четырёхзначных чисел 9000. Значит, будут только четырёхзначные и пятизначные (иначе слишком много цифр), и пятизначных $2018 - 2000 = 18$ — это числа от $9999 - (500 - 18) + 1 = 9\,518$ до $9999 + 18 = 10\,017$.

45. Поскольку и вирусы, и бактерии делятся пополам, можно считать, что у каждого вновь образовавшегося вируса «своя» вновь образовавшаяся колония бактерий (все колонии одинаковые). У первого вируса в «его» колонии сначала было 200 бактерий, и каждую минуту он уничтожал по одной бактерии (каждую минуту при этом появлялись новые вирусы вместе со своими колониями). Значит, этот вирус ровно за двести минут уничтожил всех «своих» бактерий, а поскольку во всех колониях в любой момент времени одинаковое количество бактерий, то через двести минут бактерий не останется вовсе.
Другое решение Можно доказать методом математической индукции, что через k минут, останется $2^k(n - k)$ бактерий. Тогда ясно, что через n минут колония погибнет.

46. Предположим, что такая расстановка возможна. Всего троек будет 10, тогда общая сумма чисел в них будет не больше, чем $15 \cdot 10 = 150$. Каждое число войдёт ровно в три такие тройки, тогда сумма чисел в тройках равна $(1 + 2 + \ldots + 10) \cdot 3 = 55 \cdot 3 = 165$. Противоречие, значит такой расстановки не существует.

47. Если есть хотя бы 1 рыцарь, то найдётся второй (его сосед) — все рыцари разобьются на пары. На рисунках ниже изображены все возможные расстановки пар рыцарей (р1–р1, р2–р2, …) и лжецов (л1, л2, …; а также серые и тёмно-серые клетки), начиная с угловой клетки (номера соответствуют порядку заполнения). Красным выделены клетки, в которых стоят лжецы, имеющие ровно одного соседа рыцаря, либо те, где не могут стоять рыцари, а должны (1, 2, 3). Рассмотрев случаи 1–3, получаем, что если в одном из углов стоит лжец, то на доске не должно быть ни одного рыцаря (на доске все лжецы, т. е. 0 рыцарей). В случаях 4.1–4.3 рассматриваются все возможные расположения пар рыцарей в углах, и из этого следует единственная расстановка — случай 4.3 (16 рыцарей). *Ответ.* 0 и 16 рыцарей.

л1	р1	р1	л2	1
р2			3	2
р2		р3		
		р3		

Случай 1.1

л1	р1	р1		р4
р2				р4
р2		р3	р3	
	р5			
л3	р5			
л2				

Случай 1.2

л1	р1	р1		р4
р2				р4
р2		р3	р3	
л4	л2		л5	1
р5	л3	р6	л6	2
р5		р6	л7	3

Случай 1.3

л1	р1	р1		л4
р2		л3	р3	л5
р2		л2	р3	

Случай 2.1

л1	р1	р1		л4
р2		л3	р3	р3
р2		л2		

Случай 2.2

л1	л2			
	р1	р1		

Случай 3.1

л1		л3	р1	р1
	л2	р2		
		р2		

Случай 3.2

л1		л3	л4	1
	л2		2	
		3		
	4			
5				

Случай 3.3

р1	р1			р3
л1	л3	р6		
р5		р6		
р5	л4			
л2				
р2	р2			р4

Случай 4.1

р1	р1			р3
л1				
р5	р5			
	л2	1		
р2	л3	2		
р2	л4	3		р4

Случай 4.2

р1	л1	р5		р3
р1		р5		р3
л3	р7		р8	л4
	р7		р8	
р2		р6		р4
р2	л2	р6		р4

Случай 4.3

Замечание. Можно доказать, что число рыцарей не превосходит 16, разбив прямоугольник на 2 части 1×3 (вместе образуют 1×6) и 6 квадратиков 2×2. В каждой из 8 частей не может стоять больше 2 рыцарей, откуда рыцарей $\leq 8 \cdot 2 = 16$.

48. Рассмотрим все кратные 132 или 123 трёхзначные числа: 132, 264, 396, 528, 660, 792, 924; 123, 246, 369, 492, 615, 738, 861, 984. Выберем из них те, две последние цифры которых могут быть началом другого числа: 792 (924), 924 (246), 492 (924), 861 (615). Выпишем последовательности цифр, удовлетворяющие условию задачи: 79246, 9246, 49246, 8615. Следовательно, наибольшее количество цифр 5.

49. Посмотрим на первый и последний листы (они в одном двойном листе). Сумма страниц на первом лисе равна $1 + 2 = 3$, а на последнем $130 - 3 = 127$, но на страницах одного листа последовательные номера. Получаем номер последней страницы $(127 + 1) : 2 = 64$.

50. См. решение задачи 9

51. См. решение задачи 11

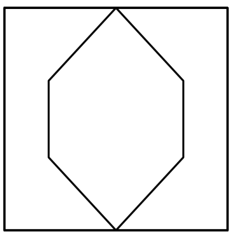
52. Выкладываем по одной из сторон доминошки, параллельно ей, и так заполняем полосу ширины 2. Оставшаяся часть разбивается на прямоугольники 1×8, которые, очевидно, разбиваются на доминошки.

53. См. решение задачи 12

54. Если все разности нечётны, то число и номер должны быть разной чётности. Раз числа и номера — это два набора от 1 до 2019, то чётных и нечётных чисел должно быть поровну. Но среди первых 2019 натуральных чисел 1010 нечётных и 1009 чётных

55. См. решение задачи 13

56. Да, сможет. Например так.



57. См. решение задачи 17

58. См. решение задачи 18

59. См. решение задачи 19

60. Если на двух трехместных скамейках сидит 5 человек, то это возможно, только если на одной скамейке сидит 2 человека, а на другой 3. Значит, Костя при подсчете учтет в этом ряду одну скамейку. Если же на двух скамейках сидит три человека, то возможны два варианта: на одной скамейке три человека, а на другой ноль, либо на одной скамейке два человека, на другой один. Как видим, в обоих случаях и в этом ряду при подсчете Костя учтет ровно одну скамейку. Таким образом, результат Кости равен числу рядов — 20.

61. Перебрав все числа от 2009 до 2018, получаем что 2008 будет наибольшим таким числом. На самом деле, это единственное число с данным свойством.

62. Сторона квадрата равна $40 : 4 = 10$. Меньшая сторона A равна $28 : 2 - 10 = 4$, тогда бОльшая сторона B равна $18 : 6 = 3$. Стороны прямоугольника C: $10 - 4 = 6, 10 - 3 = 7$. Значит площадь равна $6 \cdot 7 = 42$ (см^2).

63. Если t — время, которое был в пути Иван, то составим уравнение: $5(t + 1) = 4t + 15$, $t = 10$. Расстояние $4 \cdot 10 = 40$ км.

64. Один из возможных примеров.

5	6	8	11
7	9	12	
10	13	14	

65. См. решение задачи 25

66. Разность скоростей бегунов $6 - 4 = 2$ м/с. За 10 минут Серёжа обогнал Жору на $2 \cdot 10 \cdot 60 = 1200$ м. Этому и равна длина круга.

67. Нет, не могло, т. к. все получившиеся числа должны быть чётными.

68. См. решение задачи 28

69. См. решение задачи 29

70. См. решение задачи 30

71. См. решение задачи 31

72. См. решение задачи 32

73. Допустим, мы нашли такую секунду, когда часы показывают, что минут больше, чем секунд (например, 04:45:14). Будем называть все такие секунды секундами первого типа. Поменяв местами минуты и секунды, получим такую секунду, когда на часах больше секунд, чем минут (в нашем примере 04:14:45). Все такие секунды будем называть секундами второго типа. Аналогичным образом каждой секунде второго типа можно подобрать в пару секунду первого типа (например, парой для 23:37:59 будет 23:59:37). Поэтому те секунды, когда минут и секунд на часах не поровну, разбились на пары: в каждой паре одна секунда первого типа, а другая — второго. А значит, секунд обоих типов поровну.

74. См. решение задачи 36

75. Пусть работников x. Составим уравнение: $5x + 30 = 7x - 30$. Откуда $x = 30$.

76. См. решение задачи 37

77. См. решение задачи 40

78. Пусть разница между цифрами равна x. Посмотрим на цифру десятков первого слагаемого (a) и цифру единиц второго слагаемого (b): $a + x = 6, b + x = 5$. А их сумма равна $a + b + x = 9$ или $a + b + x = 19$ (переход через десяток). В первом случае $x = 2$, во втором $x = -8$ — чего не может быть. Значит, были записаны числа 21 и 32.

79. Если у кого-то из Катиных друзей соседи того же пола, то очевидно, что все стоящие в кругу одного пола. Значит, мальчики и девочки чередуются и следовательно, девочек столько же, сколько и мальчиков — 5.

80. Виктор нагонит Кирилла, плывя с ним в одном направлении, когда разница в расстоянии, которое они проплыли, станет равной равна длине дорожки. Разделим дорожку на 84 условных единиц длины. Тогда, разница в скорости Виктора и Кирилла составляет 2 единицы в минуту. Разница в 84 единиц будет покрыта через $84 : 2 = 42$ мин.

81. У мальчиков должны остаться числа одной чётности, иначе у одного из них сумма может оказаться нечётной. Все нечётные числа Нина забрать не могла, потому что их 4, а все чётные могла. *Ответ.* 6, 8, 10.

82. См. решение задачи 42

83. См. решение задачи 46

84. См. решение задачи 43

85. См. решение задачи 45

86. См. решение задачи 44

87. См. решение задачи 48

88. Между 28 уроками будет 27 перерывов, 4 из них будут перерывами между днями недели, а остальные $27 - 4 = 23$ — переменами между уроками. Значит Арсений съел $23 \cdot 2 = 46$ конфет.

89. См. решение задачи 1

90. Раскрасив фигуру полосатой раскраской вертикально в 2 цвета, найдём разность между кол-вом клеток одного цвета и второго. Она равна 10. Каждая фигурка может состоять из 3-х клеток одного цвета и 2-х клеток другого (разность 1), однако фигурка «П» также может состоять 4-х клеток одного цвета и 1-й клетки другого (разность 2). Тогда максимальная разность: $5 \cdot 1 + 3 = 8$. Противоречие.

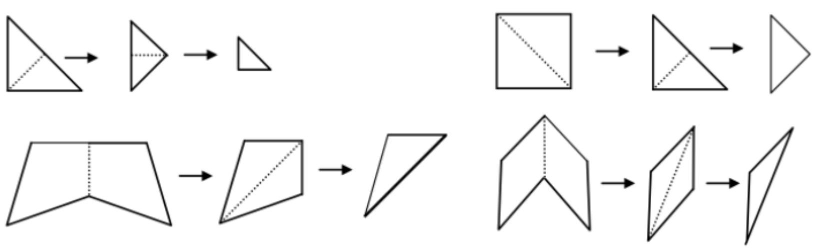
91. Пусть x — количество умных, тогда отважных $2x$, а сильных $2kx$. Их суммарное количество больше 32, поскольку некоторые игроки выбрали две способности. Очевидно количество игроков, выбравших две способности, равно $x+2x+2kx-32$. Тогда отважных будет $x+2x+2kx-34$, откуда получаем уравнение: будет $x + 2x + 2kx - 34 = 2x$. Преобразовав, получим $x(2k + 1) = 34$. Таким образом $2k + 1$ делитель 34, следовательно, $k = 8$ и $x = 2$. Тогда отважных — 4, игроков, выбравших две способности — 6, а все остальные $32 - 6 = 26$ выбрали 1 способность.

92. См. решение задачи 7

93. Заметим, что целые числа идут через равные промежутки. Если целым является каждое 20-е, то целых $[2018 : 20] = 100$ поэтому целых 100 или 101. Если же целое каждое 19-е, то 106 или 107. Если больше 20 или меньше 19, то тоже ничего не получается. *ответ.* Нет, не могло.

94. Заметим, что если у школьника стало две ириски, то до этого у него также было две ириски, поэтому количество школьников с двумя ирисками не увеличивается. Осталось понять, почему это количество хотя бы иногда уменьшается. Для этого достаточно заметить, что расстояние между двумя соседними школьниками типа КК и ИИ за один ход уменьшается на 1.

95. Легко видеть, что n-угольник может быть получен только из не более чем $2n-2$ угольника, так как при разгибании удваивается не более чем $n - 1$ сторона. А значит треугольника мог быть получен только из 3 или 4-угольника, которые, в свою очередь, могли быть получены из 3, 4, 5 или 6-угольника. Примеры приведены на картинке.



96. Заметим, что число 9 нельзя получить сложив менее чем 4 небольших числа. А любое число можно получить складывая 5 небольших чисел. Для этого достаточно в каждом разряде складывать необходимое количество двоек, единиц или нулей соответственно.

97. Сумма чисел полученного набора равна 112. Каждое число из исходных пяти в этой сумме повторяется 4 раза. Следовательно, сумма искомых чисел равна $112 : 4 = 28$. Сумма двух наименьших равна -1, сумма двух наибольших равна 22. Следовательно, среднее число (третье по величине из пяти) равно $28 - 22 - (-1) = 7$. В наборе из условия задачи второе число равно сумме первого и третьего искомых чисел, откуда первое число равно $4 - 7 = -3$, а второе равно 2. Аналогично получаем, что четвёртое число равно 9, а пятое равно 13. Итак, на доске написаны числа $-3, 2, 7, 9, 13$.

98. См. решение задачи 10

99. См. решение задачи 11

100. См. решение задачи 14

101. Если от нужного нам числа отнять 512, то получим, число, кратное 512 и оканчивающееся на три нуля. Тогда если отбросить три нуля, оставшееся число должно быть кратно $512 : 8 = 64$, т. к. 1000 делится на 8. Наименьшее такое число равно 64, значит, наше число равно 64512.

102. Разобьём доску на 32 пары клеток ходом коня (конеходы), для этого разобьём поле на прямоугольники 2×4, каждый из которых разбивается на конеходы. В каждом конеходе может стоять максимум 1 конь, значит, ровно 1 конеход будет пустым. Тогда при разбиении доски на 4 квадрата 4×4 получим, что ровно 3 из них будут содержать по 8 коней, а один квадрат содержит 7 коней. Посмотрим, как можно в квадрате 4×4 расставить 8 коней.
Далее на всех рисунках, если не указано иное: **к, к1, к2, к3** *— конь,* **х** *— клетка под боем коня,* **х1** *— клетки, которые окажутся битыми, если в клетку* **1** *поставить коня,* **0** *— клетка, в которой не может стоять конь,* **а-а, б-б** *и т. д. — конеходы.*
В случаях 1.1–1.3 пара коней стоит в углу, из них получаются 2 расстановки: «уголки» и «ряды». Если в каждом углу может стоять только 1 конь, не пара (случай 1.4), то в клетках **1-1** и **2-2** не более 1 коня, то получаем расстановку, где все кони стоят на клетках одного цвета. Если в углах нет коней (случай 1.5), то остальные клетки можно разбить на 6 конеходов — максимум 6 коней.

Случай 1.1

	х1	х	х1
х1	х	х	х
х	х	1	к2
х1	х	к3	к1

к	к		к
к			
			к
к		к	к

Случай 1.2

	х	х	х1
х1	х	х	к3
	х	1	к2
х1	х	х	к1

к			к
к			к
к			к
к			к

Случай 1.3

	а	х	
	х	х	0
а	х	0	к2
	х	0	к1

Случай 1.4

	а	1	1
б		х	а
2	х		0
2	б	0	к1

к		к	
	к		к
к		к	
	к		к

Случай 1.5

0	в	б	0
а	д	е	г
е	г	в	б
0	а	д	0

Если в каком-то квадрате 4×4 кони расставлены «уголками» (случай 2.1) или «рядами»(случай 2.2), то в соседний квадрат можно поставить не более 6 коней (в 2×4 можно поставить не более 4 коней.)

к			к	х	х		
к			к	х	х		
к			к	х	х		
к			к	х	х		

Случай 2.1

к	к		к	х			
к				х	х		
			к	х	х		
к		к	к		х		

Случай 2.2

Начав в любом квадрате с 8 конями рассматривать расстановку, мы придём к тому, что в каждом из них кони стоят на одном цвете, при этом в соседних квадратах кони также должны оказаться на одном цвете.

к		к		к	к	к	
	к		к		к		к
к		к		к		к	
	к		к		к		к
к		к			х	х1	х
	к		к	х	х1	х	
к		к		а	х		1
	к		к	х	х1	а	

Случай 3.1

	к		к		к		к
к		к		к		к	
	к		к		к		к
к		к		к		к	
	к		к	х		х	
к		к			х	х1	х
	к		к	х	х1	0	
к		к			х		1

Случай 3.2

х	х1	х	х1
х1	х		х
х		1	
х1	х		

В результате имеем 2 варианта расстановки коней в этих квадратах. Разбор расстановки в 4-м квадрате показывает, что в случае 3.1 остальные 7 коней стоят на том же цвете (если хотя бы один на другом, например **1**, то поместится не более 6 коней), а в случае 3.2, кроме расстановки 7 коней на том же цвете ещё возможна расстановка, когда один конь попал на клетку другого цвета и при этом находится в углу (в клетке **0** конь не может стоять, см. рисунок слева) — других расстановок нет. В результате существуют 64 расстановки, когда все кони стоят на одном цвете и одна клетка этого цвета пуста, а также ещё 4 расстановки, когда 30 коней стоят на одном цвете, а ещё один конь на другом цвете в углу доски. *Ответ.* 68.

Комментарий. Собственно, мы доказали, что на доске 8×8 можно расставить 32 коней, не бьющих друг друга, лишь одним способом (с точностью до поворота).

103. Заметим, что за ход все гномики красят суммарно не более 32 домиков (могут меньше, если несколько красят одновременно один). Таким образом, для покраски всех домов понадобится не менее $1024 : 32 = 32$ ходов. С другой стороны, если никто не красил уже покрашенный дом, то после второго хода каждый гномик не мог пойти в обратном направлении. То есть, как минимум со второго хода каждый гном своим ходом сохраняет своё направление. Тогда посмотрим на того гномика, который шагает на 32 хода. Если он совершит 33 хода, то пройдёт больше круга и наткнется на свой домик, который уже красил. Таким образом, он не может ходить больше 32 раз. Объединяя с оценкой, написанной выше, получим, что у нас всего произошло 32 хода. Тогда посмотрим теперь на гномика, шагающего на один дом. За 32 хода он покрасит 32 подряд идущих домика. А из 32 домиков один был покрашен гномиком с самым длинным ходом. Но тогда либо кто-то из них красил уже крашеный дом, либо же они один дом красили одновременно. Но если они дом красили одновременно, то в этот ход было закрашено не больше 31 дома, то есть понадобится 33 ход. А в 33 ход гномик с самым длинным ходом наткнется на дом, который он уже красил. Таким образом, хотя бы один гном будет красить уже покрашенный дом.

104. Построим следующий граф. Вершинами будут школьники. Две вершины соединим ребром, если соответствующие им школьники не знакомы. Нам надо узнать какое максимальное количество ребер может быть в этом графе. Приведем пример при котором в этом графе 100 ребер, а именно рассмотрим граф в виде цикла длины 100. Отметим любые 6 вершин и разобьем их на тройки так, что в каждой будут идущие через одну в цикле, тогда никакие две из одной тройки не соединены ребром. Докажем, что в нашем графе не может быть более 100 ребер. В нашем графе нет вершины степени больше трех. Иначе рассмотрим следующую шестерку вершин-школьников A, четырех ее соседей B, C, D, E и произвольную K. Тогда по построению графа школьник A может жить в одной комнате только с K, что противоречит возможности поселить их по три человека знакомых друг с другом. Пусть есть вершина X степени 3, её соседей обозначим через U, V, Y. Если есть еще две вершины P и Q отличные от этих четырех соединенные ребром, то рассмотрим эту шестерку школьников. X может жить только с P и Q, которые не могут жить вместе. Значит все ребра имеют одной из своих вершин одну из четырех X, U, V, Y, а так как степень по доказанному выше у каждой не больше трех то всего получается ребер не больше $12 < 100$. Если же из каждой вершины выходит не больше двух ребер тогда их всего не больше $100 \cdot 2 : 2 = 100$. Мы доказали, что незнакомств максимум 100, тогда знакомств минимум $100 \cdot 99 : 2 - 100 = 4950 - 100 = 4850$.

105. Б $= 9$, А $= 0$, тогда рассмотрим подходящие варианты И + Ц: $2+8, 3+7, 4+6, 6+4, 7+3$ и $8+2$.

1) $2+8$: 9О2 + 9Л28 = 10У30, если О $= 3$, то З $= 6$ и небольшим перебором буквы Л находим решение $932 + 9528 = 10460$; О $= 4$, то З $= 7$ и перебором находим решение $942 + 9628 = 10570$; О $= 5$, 6 или 7, то З $= 8$, 9 или 0 — противоречие.

2) $3+7$: 9О3 + 9Л37 = 10У30, если О $= 2$, то З $= 6$ и находим решение $923 + 9537 = 10460$; О $= 4$, то З $= 8$ и находим решение $943 + 9637 = 10580$; О $= 5$ или 6, то З $= 9$ или 0 — противоречие; О $= 8$, то З $= 2$ и произойдет переход через десяток в разряде сотен, но т. к. БОИ начинается с 9, то Л будет равно У — противоречие. **(∗)**

3) $4+6$: 9О4 + 9Л46 = 10У30, если О $= 2$, то З $= 7$ нет решений (перебор); О $= 3$, то З $= 8$ тоже нет решений (перебор); О $= 5$, то З $= 0$ — противоречие; О $= 7$, то З $= 2$ и аналогично **(∗)**.

4) $6+4$: 9О6 + 9Л64 = 10У30, если О $= 2$ или 2, то З $= 9$ или 0 — противоречие; О $= 5$, 7 или 8, то аналогично **(∗)**.

5) $7+3$ и $8+2$, если О > 1, то аналогично **(∗)**.

Ответ. $932 + 9528 = 10460$, $942 + 9628 = 10570$, $923 + 9537 = 10460$, $943 + 9637 = 10580$.

106. См. решение задачи **26**

107. Это красное число. Оно не может быть ни синим, ни зелёным (см. таблички).

синее	1	2	3	1	2	3
зелёное	2	3	2	2	3	2
?	3	2	3	3	2	3
синее	2	1	1	1	1	1

зелёное	1	2	3	1	2	3
?	3	3	2	3	3	2
синее	2	1	1	1	1	1

108. Если $n < 19$, то 8 может быть только рядом с 17 и других соседей у этих чисел нет. При $n = 19$, 20 и 21, будут три числа, имеющих только одного соседа. Пример: 8 17 19 6 10 15 21 4 12 13 3 22 14 11 5 20 16 9 7 18.

109. Рассмотрим соответствующий орграф. Степени исхода и захода у каждой вершины равна 1. Значит, граф разбивается на циклы. Нет треугольных циклов, т. к. для любых трех гномиков можно указать четвертого, который подбил глаз одному из них. Нечетных циклов не более 6 ($7 \cdot 5 = 35 > 33$), но тогда остаётся треугольник, поэтому нечётных циклов не более 5. Если убрать по одному гномику из каждого нечётного цикла, то всё получается.

110. См. решение задачи **22**

111. Обозначим в начале коридора концы проводов за A, B, C, D, в конце за 1, 2, 3, 4. Пусть Вася свяжет концы A, B и пройдёт по коридору. Проверяя прибором все пары концов 1, 2, 3, 4 можно установить, какие из них A, B. Пусть без ограничения общности это провода 1 и 2 (мы уже сопоставили множества $AB \leftrightarrow 12, CD \leftrightarrow 34$). Связываем концы 2 и 3, и проходим по коридору обратно. Развязываем концы A, B, и, проверяя все пары, выясняем, какой из концов A, B связан с концом из пары 2, 3 и какой из пары A, B связан с концом 1. Аналогично, выясняем, какой их концов C, D связан с проводом из пары 2, 3, а какой связан с концом 4. *Ответ.* 200 метров. **Комментарий.** Если проводов больше, то тоже, оказывается, хватит 200 метров.

112. См. решение задачи **21**

113. Пускай найдутся. Тогда каждый сделал 8 рукопожатий. На каждом переселении у гномика может быть либо 2, либо 3, либо 4 соседа. Тогда есть только два варианта разложения: $4+2+2$ и $3+3+2$ с точностью до перестановки. Значит, все три раза центральная клетка была занята разными гномиками. Покрасим теперь шахматной раскраской так, чтобы центральная была чёрной. Но две изначально чёрные клетки могут двигаться только по чёрным клеткам. Тогда заметим, что изначально чёрная изначально не может соседствовать с другой изначально чёрной. Значит, они никогда не будут соседями, хотя должны. Противоречие.

114. Для начала попробуем оценить количество «ходов» Остапа Бендера. За первый ход

Остап сначала отдает одного слона, затем ещё одного, потом двух, трёх и так далее. Таким образом, за n ходов он раздаст количество слонов, на единицу большее суммы первых n подряд идущих натуральных чисел. Тогда несложно оценить, что количество ходов Остапа Бендера не больше 64. Посмотрим, что произойдёт после первых двадцати ходов. Без слонов останутся 8 человек, образующих четыре диаметрально противоположные пары, а 20 слонов получит человек, стоящий диаметрально противоположно второму обладателю одного слона. Что же такое 21 ход? Это то же самое, что и первый ход, только в обратном направлении. Таким образом, ходы с 21 по 40 аналогичны ходам с 1 по 20, только ходит Остап в противоположную сторону, а слонов получают диаметрально противоположные люди. Таким образом, 40 слонов получит второй обладатель одного слона, то есть мы вернулись в исходную точку, ведь 41 ход будет абсолютно аналогичен 1 ходу, 42 — 2, и так далее. Таким образом, люди, не получившие слонов в первые двадцать ходов, в дальнейшем их тоже не получат. То есть без подарков Остапа останутся 8 человек.

115. См. решение задачи 39

116. Да, строится пример: одна команда победила 14 раз, оставшиеся победили 4 раза, сыграли вничью и проиграли по 5 раз.

117. Положим на чаши по 10 камней (выбираем любые камни). Если чаши в равновесии, то меняем местами любые 2 камня *с разных чаш*, и одна из чаш перевесит, т. к. все камни разного веса, а значит, один из переложенных камней тяжелее — тот, который теперь лежит на тяжелой чаше. Если чаши изначально не равны, то начнём менять местами пары камней (те камни, которые уже перекладывали, не трогаем). В какой-то момент изначально лёгкая чаша перевесит (ведь, если переложить *все* камни с одной чаши на другую, положения чаш изменится). Тогда камень, который перед этим переложили с тяжёлой чаши на лёгкую тяжелее второго камня. *Замечание.* Если на чаши разрешается класть по 15 камней, то догадаться до идеи решения становится проще.

118. См. решение задачи 35

119. См. решение задачи 36

120. См. решение задачи 38

121. Предположим, что найдутся четыре подряд идущих числа, удовлетворяющих условию. Заметим, что среди четырёх подряд идущих чисел одно делится на 4. Тогда в разложении этого числа на простые множители есть не менее двух двоек — это 4. Соседи 3 и 5 — простые числа — не удовлетворяют условию задачи. Значит, искомых чисел не более трёх. Наименьшая такая тройка: $33 = 3 \cdot 11, 34 = 2 \cdot 17, 35 = 5 \cdot 7$. Ещё несколько примеров: $85 = 5 \cdot 17, 86 = 2 \cdot 43, 87 = 3 \cdot 29$; $93 = 3 \cdot 31, 94 = 2 \cdot 47, 95 = 5 \cdot 19$. Можно отметить, что в каждой тройке из примеров все простые разные.

122. Пусть x — число двоек, y — число троек, z — число четвёрок. Тогда $x+y+z = 63$, $x = z+22$. Отсюда $y + 2z = 41$. Остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы его цифр на 9. Пусть S — сумма цифр. Тогда $167S = 2x + 3y + 4z = 2(x + y + z) + y + 2z = 2 \cdot 63 + 41 = 167$. *Ответ.* 5.

123. См. решение задачи 43

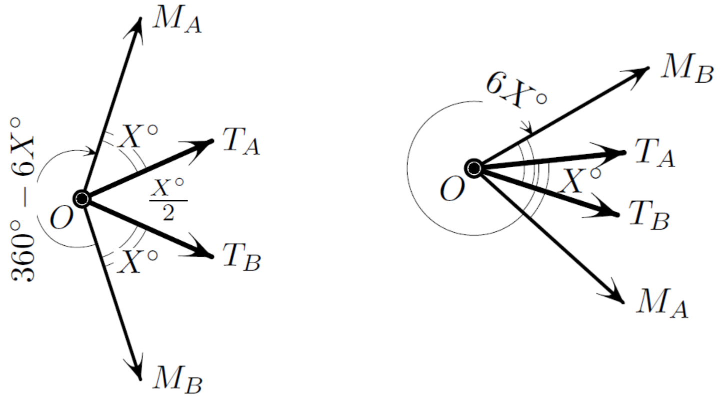
124. Посчитаем семизначные числа, которые удовлетворяют условию задачи. Это числа, в которых **I** три цифры одинаковые, остальные цифры разные; **II** три цифры одинаковые и ровно две другие цифры повторяются; **III** три цифры одинаковые и 2 пары повторяющихся цифр (но разных между собой); **IV** 2 тройки повторяющихся цифр (но разных между собой); **V** три цифры одинаковые и четыре другие цифры повторяются. Чисел типа **I**: $9/10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot C_7^3$ (выберем 5 разных цифр, потом выберем, на каких трёх местах будут стоять три одинаковые цифры, и умножим на 9/10, чтобы убрать те, которые начинаются с 0 — все цифры на первом месте встречаются с одинаковой частотой 1/10), чисел типа **II**: $9/10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot C_7^3 \cdot C_4^2$, чисел типа **III**: $9/10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 1/2!$ (повторяющихся вариантов 2!), чисел типа **IV**: $9/10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot C_7^3 \cdot C_4^3 \cdot 1/2!$

(повторяющихся вариантов 2!) и чисел типа **V**: $9/10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot C_7^3$. Тогда искомых чисел 2 021 355.

125. См. решение задачи 47

126. Рассмотрим максимальное паросочетание, то есть максимально возможное число m такое, что m дорог оканчиваются в $2m$ различных городах. Очевидно, что $m \geq 1$. Предположим, что $m \leq 5$. Тогда в паросочетание не вошли $20-2m$ городов. Из них каждый с кем-то соединён, но никакие не соединёны между собой, так как в противном случае можно увеличить паросочетание ещё на одну пару. Для каждого из $20-2m$ городов рассмотрим его соединение дорогой с кем-то из $2m$ участников паросочетания. Тогда все эти дороги будут попарно различными, и к ним добавятся ещё m дорог между городами. Всего получится $20-m$ дорог, что не должно превосходить 14, откуда $m \geq 6$ — противоречие.

127. Поскольку между двумя последовательными обгонами часовой стрелки минутной проходит более часа, то за указанное время движения поезда произошло не более одного обгона. Обозначим O — центр циферблата, T_A и T_B — точки, в которых находился конец часовой стрелки в моменты прохождения поездом начальной станции A и конечной B соответственно, а M_A и M_B — точки, где в эти моменты находился конец минутной стрелки. Заметим также, что за t минут часовая стрелка повернулась на $t/2$ градусов, а минутная — на $6t$ градусов.
Тогда, если минутная стрелка обогнала часовую, то точки T_A, T_B, M_A и M_B располагаются друг относительно друга так, как левом рисунке. При этом должно выполняться равенство $6t = t + t + t/2$, откуда $t = 0$, что противоречит условию задачи. Если же обгона не было, то T_A, T_B, M_A и M_B располагаются так, как на правом рисунке, и должно выполняться равенство $360 - 6t = t + t - t/2$, откуда $t = 48$.



128. В течение первых 10 операций заведомо исчезнет зазор между левой стенкой и ближайшим к ней левым чемоданом. Действительно, либо этот «левый чемодан» будет в свой ход придвинут к стенке, либо, если в зазоре мог поместиться чемодан с меньшим номером, самый первый из таких чемоданов и будет поставлен вплотную к стенке. В результате один из чемоданов — назовем его A — окажется стоящим вплотную к стенке и при последующих действиях кладовщика больше не будет двигаться. В течение следующих 10 операций заведомо исчезнет зазор между чемоданом A и чемоданом, ближайшим к нему справа. Действительно, либо этот «ближайший справа чемодан» будет в свой ход придвинут к чемодану A, либо, если в зазоре мог поместиться чемодан с меньшим номером (кроме чемодана A), самый первый из таких чемоданов и будет поставлен вплотную к чемодану A. В результате чемодан A стоит вплотную к стенке, а вплотную к нему расположен еще один чемодан — назовем его B, — причем при последующих действиях кладовщика оба чемодана больше не будут двигаться. Продолжая эти рассуждения, мы получим, что после 30 операций у левого края стенки будут вплотную стоять уже три чемодана, после 40 операций — 4 чемодана и т. д. Наконец, после 100 операций все 10 чемоданов будут стоять слева на полке без зазоров. Перемещение чемоданов на этом завершится.

5 Результаты и итоги турнира

Во всех лигах прошли круговые турниры. Победителем в высшей лиге 5 класса стала команда «Раз-Два-Три-4» (г. Санкт-Петербург), в первой лиге 5 класса— «Катеты (444)» (г. Москва), а в лиге 6 класса — «Фрактал 6-1» (г. Санкт-Петербург).

Лучший докладчик Высшей лиги 5 класса — Семено Кирилл («2086-5-3», г. Москва).
Лучший оппонент Высшей лиги 5 класса — Пименов Марк («2086-5-2», г. Москва).

Лучший докладчик Первой лиги 5 класса — Царёва Анастасия («Тӧдысьяс», г. Сыктывкар).
Лучший оппонент Первой лиги 5 класса — Паламарчук Антон («Google в помощь», школа № 444, г. Москва).

Высшая лига 5-х класса

место	Высшая лига	1	2	3	4	5	6	очки
1	«Раз-Два-Три-4» *г.Санкт-Петербург*		48:37 2	66:18 2	38:48 0	62:21 2	55:36 2	8
2	2086-5-3 *г.Москва*	37:48 0		46:46 1	45:29 2	39:25 2	55:11 2	7
3	2086-5-2 *г.Москва*	18:66 0	46:46 1		52:35 2	60:0 2	46:32 2	7
4	«Проекция» *г.Москва, шк.444*	48:38 2	29:45 0	35:52 0		46:24 2	51:15 2	6
5	«444.3» *г.Москва, шк.444*	62:21 0	25:39 0	0:60 0	24:46 0		37:35 1	1
6	«СВМ-4» *г.Иваново-Мытищи*	36:55 0	11:55 0	32:46 0	15:51 0	35:37 1		1

Первая лига 5-х класса

место	Первая лига	1	2	3	4	5	6	очки
1	«Катеты» *г.Москва, шк.444*		53:32 2	40:39 1	36:18 2	53:20 2	58:16 2	9
2	2086-5-1 *г.Москва*	32:53 0		32:28 2	54:23 2	59:27 2	54:0 2	8
3	«Google в помощь» *г.Москва, шк.444*	39:40 1	28:32 0		44:16 2	51:15 2	52:10 2	7
4	«Тӧдысьяс» *г.Сыктывкар*	18:36 0	23:54 0	16:44 0		60:6 2	49:6 2	4
5	«Эврика» *г.Сыктывкар*	20:53 0	27:59 0	15:51 0	6:60 0		36:22 2	2
6	«Комби-Рика» *г.Сыктывкар*	16:58 0	0:54 0	10:52 0	6:49 0	22:36 0		0

Лига 6-х класса

место		1	2	3	4	5	6	*очки*
1	«Фрактал 6-1» *г.Санкт-Петербург*		51:24 2	37:23 2	43:40 2	51:6 2	40:24 2	10
2	«Раз-Два-Три 6» *г.Санкт-Петербург*	24:51 0		51:24 2	13:67 0	70:0 2	67:5 2	6
3	«Фрактал 6-2» *г.Санкт-Петербург*	23:37 0	24:51 0		36:34 1	60:0 2	24:19 2	5
4	1329-6-2 *г.Москва*	40:43 0	67:13 2	34:36 1		52:7 2	0:60 0	5
5	1329-6-1 *г.Москва*	6:51 0	0:70 0	0:60 0	7:52 0		18:8 2	2
6	«МММФ-КА» *г.Москва-Иваново*	24:40 0	5:67 0	19:24 0	60:0 2	8:18 0		2

6 Правила соревнований

Турнир математических боёв

1. Цель проведения турнира — развитие и поддержка олимпиадного движения, а также приобретение школьниками опыта участия в математических соревнованиях разного уровня.
2. Для школьников 5 класса будет использован формат мини-боёв, с сокращёнными временем решения задач и длительностью самого боя, также возможно проведение двух мини-боёв в течение одного дня.
3. Для школьников 6 класса будут проведены классические математические бои.
4. В каждом бою может участвовать от 4 до 6 человек в составе одной команды.
5. В командах из 5-6 человек каждый участник имеет право на два выхода независимо в роли докладчика или оппонента. В команде из 4 человек после того как все участники используют по два выхода двое участников имеют право на третий выход. Выход на конкурс капитанов за выход не засчитывается.
6. За победу в бое дается 2 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0. За неявку на бой без уважительной причины засчитывается техническое поражение. Бой считается закончившимся вничью, если разница в счете составляет не более 2 баллов (кроме финальных боёв — ничья только при равенстве набранных баллов).
7. Команды распределяются по количеству очков. Если 2 или более команд набрали равное количество очков, то для определения места в лиге используются (в порядке убывания приоритетов) следующие факторы:
   - Количество очков, набранных командами в личных встречах между этими командами
   - Разница между «набранными» и «отданными» баллами в личных встречах между этими командами
   - Разница между «набранными» и «отданными» баллами во всех боях
   - Количество «набранных» баллов во всех боях
8. В случае, если по данным параметрам определить очередность мест невозможно, проводится дополнительный блиц-бой.

Правила устной командной олимпиады

1. Решения каждой задачи рассказывается устно члену жюри. При этом разрешается пользоваться своими записями, но запрещается использовать готовый текст решения.
2. Каждый член команды имеет право рассказывать решения не более чем двух задач независимо от количества членов команды, участвующих в олимпиаде. При этом если задачу выходили сдавать несколько участников, то подходы засчитываются каждому.
3. При решении задач запрещается использование калькуляторов, вычислительной и другой электронной техники, мобильных телефонов, какой-либо литературы. При обнаружении этого факта результаты команды аннулируется.
4. По каждой задаче имеется не более трех попыток. То есть, если за три подхода задача не решена, то сдавать ее больше нельзя, и задача считается нерешенной.
5. За задачу, сданную с первой попытки, ставится 7 баллов, со второй — 6 баллов, с третьей — 5 баллов.
6. У каждой команды имеется карточка участника, в которую вносятся результаты каждого подхода — «+», если задача полностью решена (ставится членом жюри с подписью), и «–» — во всех остальных случаях.

7. Общее время на решение задач — 2 часа (120 минут).
8. Общее количество задач — 8.
9. Результатом командной олимпиады является количество набранных баллов, независимо от количества задач. При равном количестве баллов решение принимается председателем жюри совместно с руководителями команд.

Правила математического мини-боя

Единственное отличие математического мини-боя от классического матбоя — это сокращённая длительность.

1. Время решения командой задач — 2 часа (120 минут).
2. На доклад отводится не более 15 минут, на последующую дискуссию оппонента и докладчика — не более 15 минут.
3. В каждом туре 8 задач (как в классическом матбое).